Devoir Surveillé

Novembre 2001.

Tous documents autorisés
Durée : 2 heures
Les 4 exercices sont *indépendants*.

Exercice 1 (sur 6 points)

On dispose d'un additionneur sur 8 bits : ce circuit produit, à partir de deux mots $\mu_1, \mu_2 \in \{0,1\}^8$, un mot $\mu \in \{0,1\}^8$, que l'on notera :

$$\mu = \mu_1 \square \mu_2.$$

1- Fixons deux mots $m_1 = 10111100$ et $m_2 = 11100110$.
Que vaut $m_1 \square m_2$?
Etant donné un mot $u = b_7 b_6 \ldots b_0$ on note

$$\nu(u) = \sum_{i=0}^{7} b_i 2^i, \quad \nu_2(u) = -b_7 2^7 + \sum_{i=0}^{6} b_i 2^i.$$

2- Est-il vrai que $\nu(m_1 \square m_2) = \nu(m_1) + \nu(m_2)$? (pour les mots m_1, m_2 définis en (1))
3- Est-il vrai que $\nu_2(m_1 \square m_2) = \nu_2(m_1) + \nu_2(m_2)$? (pour les mots m_1, m_2 définis en (1))
4- Considérons les quatre égalités :

4.1 $\nu(\mu_1 \square \mu_2) = \nu(\mu_1) + \nu(\mu_2) + 2^8$?

4.2 $\nu(\mu_1 \square \mu_2) = \nu(\mu_1) + \nu(\mu_2) + 2^7$?

4.3 $\nu_2(\mu_1 \square \mu_2) = \nu_2(\mu_1) + \nu_2(\mu_2) + 2^8$?

4.4 $\nu_2(\mu_1 \square \mu_2) = \nu_2(\mu_1) + \nu_2(\mu_2) + 2^7$?

Pour chacune de ces quatres égalités, déterminer s'il existe des mots $\mu_1, \mu_2 \in \{0,1\}^8$ qui la réalisent.

Exercice 2 (sur 6 points)

Considérons la fonction $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}^3$ définie par

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = (y_2, y_1, y_0) \text{ où } \mathrm{Card}\{i \in [0,3] \mid x_i = 1\} = 4y_2 + 2y_1 + y_0.$$

(Autrement dit f calcule le nombre de composantes non-nulles de son argument).
1-Construire un circuit combinatoire qui calcule f.
Considérons la fonction $S_2 : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ définie par

$$S_2(x_2, x_1, x_0) = 1 \Leftrightarrow 4x_2 + 2x_1 + x_0 \geq 2.$$

2-Construire un circuit combinatoire qui calcule S_2.
3-Considérons la fonction $g : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ définie par

$$g(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum_{0 \le i < j \le 3} x_i x_j.$$

Construire un circuit combinatoire qui calcule g, en utilisant les circuits des questions 1 et 2.

Exercice 3 (sur 6 points)

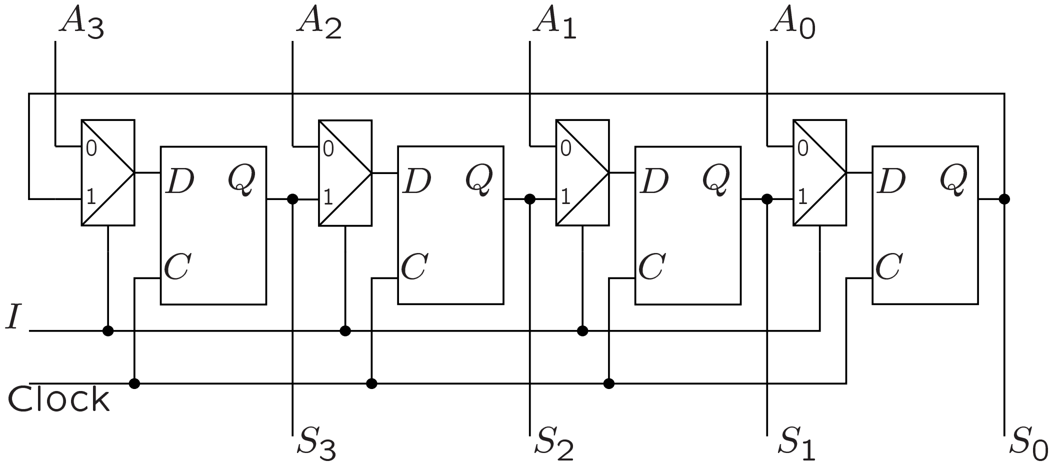
On considère une variante du codage des nombres flottants. On va les représenter sur 16 bits : s (signe sur 1 bit), e (exposant sur 5 bits), m (mantisse sur 10 bits). La valeur d'un mot binaire

$$x = s|e_4e_3e_2e_1e_0|m_9m_8m_7m_6m_5m_4m_3m_2m_1m_0$$

est donc

$$(-1)^s \times 2^{e-15} \times 1, m_9m_8m_7m_6m_5m_4m_3m_2m_1m_0$$

1. Trouvez la représentation de $2,5$.
2. Trouvez la représentation de $6,6$ (indice : $0,6 = 6/10 = 9/15 = 9/16 + 9/256 + 9/16^3 + \ldots$).
3. Quel est le nombre maximal M que l'on peut représenter ? Le plus grand nombre $M' < M$ dont la représentation est différente de celle de M ?
4. Détaillez (en utilisant l'algorithme standard de l'addition de nombres flottants avec l'arrondi par troncature) le calcul de $2,5 + 6,6$. Vérifiez le résultat (comparez-le avec $9,1 = 2,5 + 6,6$).



Exercice 4 (sur 6 points)

Que fait ce circuit ? Quelles sont les relations entre A, I, S ?