Université Bordeaux I
Licence d'Informatique 1999/2000

Architecture des ordinateurs et Micro-processeurs : feuille 1

Logique Combinatoire

Exercice 1.1

Trouver toutes les fonctions booléennes de deux variables x et y; donner une interprétation de chacune de ces fonctions.

Exercice 1.2

Montrer l'associativité de l'opération $\oplus$ (OU exclusif); quelle relation y a-t'il entre $\bar{a} \oplus b$ et $a \oplus \bar{b}$?

Donner une interprétation de $a \oplus b \oplus c$; de $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} a_i$.

Exercice 1.3

1- Montrer que toute fonction de B^n dans B est exprimable par un polynôme booléen.

2- Montrer que toute fonction de B^n dans B est exprimable par un polynôme de $Z/2Z[X_1, \ldots, X_n]$.

3- On considère les fonctions définies par les tables de verités suivantes:

x	y	z	f_1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1

x	y	z	t	f_2
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

(Seulement les arguments pour lesquels f vaut 1 sont donnés.) Exprimer ces fonctions sous les formes 1 et 2.

Exercice 1.4

Un prisonnier P fait face à 2 portes G, D. L'une conduit à la liberté, l'autre à l' échafaud. Un garde X est devant les 2 portes. Il sait quelle porte conduit à la liberté. Soit X dit toujours la vérité, soit il ment toujours. Quelle question φ peut poser P à X pour déterminer quelle est la porte de la liberté?

Indication: construire φ comme une combinaison booléenne des deux affirmations: $v =$"X dit la vérité" et $g =$ "la route de gauche conduit à la liberté"; construire la table de vérité de φ et en déduire φ.

Exercice 1.5

Un ensemble de connecteurs $\mathcal{C}$ sera dit *complet* si tout connecteur peut s'exprimer à partir des connecteurs de $\mathcal{C}$.

1-Les ensembles suivants sont-ils complets?: $\mathcal{C}_1 = \{and, or, not\}$; $\mathcal{C}_2 = \{and, xor, true\}$; $\mathcal{C}_3 = \{and, or, true, false\}$; $\mathcal{C}_4 = \{imply, not\}$; $\mathcal{C}_5 = \{imply, false\}$; $\mathcal{C}_6 = \{imply\}$; $\mathcal{C}_7 = \{nand\}$; $\mathcal{C}_8 = \{nor\}$.

2-Vérifier que, lorsque l'ensemble de connecteurs $\mathcal{C}$ est complet, on peut exprimer toute fonction booléenne à n arguments $a_1, \ldots a_n, (n \geq 1)$ par une expression arithmétique d'opérandes $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et dont les opérateurs sont des connecteurs de $\mathcal{C}$.

Exercice 1.6
On considère les ensembles de connecteurs: $\mathcal{C}_9 = \{equiv, not\}$; $\mathcal{C}_{10} = \{xor, not\}$.
1- Montrer que, pout tout $n \geq 1$ les fonctions n-aires exprimables à l'aide des connecteurs de $\mathcal{C}_9$ sont les mêmes que celles qui sont exprimables à l'aide des connecteurs de $\mathcal{C}_{10}$.
2- Montrer que toute fonction $f : (Z/2Z)^n \to Z/2Z$ exprimable à l'aide de $\mathcal{C}_{10}$ peut être mise sous l'une des formes:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \oplus_{i=1}^n c_i \cdot a_i \text{ ou } f(a_1, \ldots, a_n) = not(\oplus_{i=1}^n c_i \cdot a_i)$$

où les coefficients c_i sont des éléments de $Z/2Z$.
3- En déduire que le nombre de fonctions n-aires exprimables à l'aide de $\mathcal{C}_{10}$ est au plus 2^{n+1}.
4-Montrer qu'il esiste au moins une fonction binaire qui n'est pas exprimable à l'aide de $\mathcal{C}_{10}$.
5-Montrer que le produit est une fonction binaire qui n'est pas exprimable à l'aide de $\mathcal{C}_{10}$.

Exercice 1.7
On considère le corps des entiers modulo 3, $(Z/3Z, +, \times)$.
1-Montrer que toute fonction unaire $f : Z/3Z \to Z/3Z$ est polynomiale.
2-Montrer que toute fonction à n arguments, $f : (Z/3Z)^n \to Z/3Z$ est polynomiale.
3-Supposons que l'on ait découvert un dispositif physique permettant de représenter des "tet" (*te*rnary digi*ts*) et de les transmettre le long de "fibres ternaires". Quelles "portes ternaires" (i.e. fonctions $(Z/3Z)^2 \to Z/3Z$) suffit-il de savoir réaliser pour pouvoir calculer n'importe quelle fonction $f : (Z/3Z)^n \to Z/3Z$?
4-A quels entiers (autres que 2 et 3) le raisonnement précédent peut-il être étendu?

Exercice 1.8
Le professeur Cosinus veut assembler, avec des portes and, or , not, un circuit qui réalise les fonctions:

$$f_1 = a \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$$

$$f_2 = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$$

$$f_3 = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} + a \cdot b$$

Pouvez-vous l'aider?
Indication: Le professeur Cosinus est très distrait: il n'a pas remarqué que ces fonctions sont extrêmement simples.

Exercice 1.9
Le registre d'état d'un microprocesseur 8 bits comporte un bit `C(arry)` de retenue, et un bit `(o)V(erflow)` de débordement. Donner une expression logique des booléens `C` et `V` en fonction des bits de fort poids des opérandes et du résultat de l'addition.

Exercice 1.10
On considère, pour tout entier n, l'ensemble de variables propositionnelles $\mathcal{P}_n = \{p_1, p_2, \cdots, p_i, \cdots\cdots, p_n\}$ et l'ensemble de connecteurs $\mathcal{C}$ constitué des symboles:

$\wedge$ (conjonction) , $\vee$ (disjonction) , $\neg$ (négation) ,

ff (constante "faux") , vv (constante "vrai") .

On note $\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{C})$ l'ensemble des formules bien-formées construites avec ces variables et ces connecteurs. On définit $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C} - \{\neg\}$.
On appelle formule *positive* tout formule de $\mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_+)$. On note $B = \{0, 1\}$ l'ensemble des

Booléens et $B_n = \{0,1\}^n$. On note $\leq$ l'ordre sur B défini par $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1$ et $\leq_n$ l'ordre sur B_n défini par:

$$(b_1, \cdots, b_i, \cdots, b_n) \leq_n (b'_1, \cdots, b'_i, \cdots, b'_n) \Leftrightarrow \forall i \in [1,n], b_i \leq b'_i.$$

On note $\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}) \to B^{B_n}$ l'application qui envoie chaque formule sur une fonction Booléenne à n variables Booléennes.
1- Montrer que si F est une formule positive, alors $\varphi(F)$ est une fonction croissante de $(B_n, \leq_n)$ dans $(B, \leq)$. Exhiber une formule non-positive dont l'image par φ est croissante.
2- Démontrer que toute application croissante de $(B_n, \leq_n)$ dans $(B, \leq)$ est de la forme $\varphi(F)$, pour une formule positive F.
3- Peut-on donner une représentation analogue des applications croissantes *non-constantes* de $(B_n, \leq_n)$ dans $(B, \leq)$?

Exercice 1.11
Soit C un circuit combinatoire à n entrées et n sorties de profondeur d. Si deux copies de C sont reliées, les sorties de l'un alimentent directement les entrées de l'autre, quel est la profondeur maximum j de ce circuit en tandem? Quelle est sa profondeur minimum?

Exercice 1.12
Un *circuit de pointage* possède n entrées binaires et $m = \lceil \log(n+1) \rceil$ sorties. Interprétées comme des nombres binaires, les sorties donnent le nombre de 1 présents en entrée. Par exemple, si l'entrée est 10011110, la sortie vaudra 101, indiquant qu'il y a cinq 1 dans la suite d'entrées. Décrire un circuit de pointage de profondeur $O(\log n)$ et de taille $\theta(n)$.

Exercice 1.13
1-Soit f une fonction booléenne de n variables booléennes $a_1, \ldots, a_n$. Supposons qu'il existe un circuit C de profondeur d capable de calculer f.
Montrer comment construire à partir de C une formule booléenne pour f de longueur $O(2^d)$.
2-Montrer qu'une fonction boolénne *symétrique* $f(a_1, \ldots, a_n)$ peut être exprimée comme une fonction de l'entier $\sum_{i=1}^{n} a_i$.
3-En utilisant le résultat de l'exercice précédent (circuit de pointage), montrer que toute fonction boolénne *symétrique* sur n entrées booléennes peut être calculée par un circuit combinatoire de profondeur $O(\log n)$.
4-montrer que toute fonction boolénne *symétrique* sur n entrées booléennes peut être représentée par une formule booléenne de longueur polynomiale.