

Représentations par frontières

Stefka GUEORGUEVA
`stefka.gueorguieva@labri.fr`

Plan

- 1 Représentations par frontières **BRepr**
 - Notions de base
 - Formule d'Euler-Poincaré
 - Opérateurs d'Euler
- 2 Structures de données
- 3 Pour approfondir
 - "Arête ailée" de B.G.Baumgart
 - "Arête-radiale" de K.Weiler
 - Complexes

BRepr : Notions de base

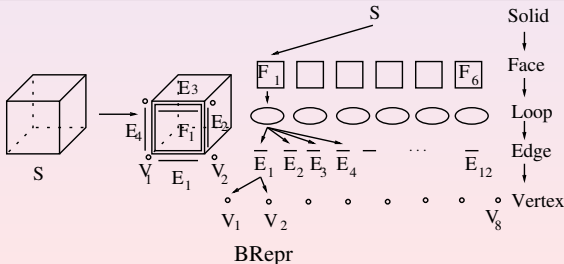
Représentations par frontières

Une représentation est dite représentations par frontières, **Boundary Representation**, ssi est fondée sur la description de la subdivision de la surface frontière des solides en cellules de dimension $0D$, **les sommets**, $1D$, **les arêtes**, et $2D$, **les faces**, et son plongement dans l'espace E^3 .

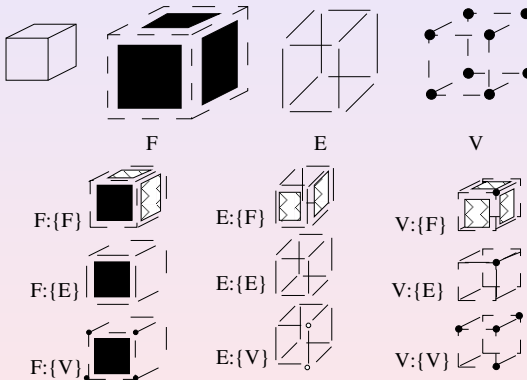
BRepr : Notions de base

Représentations par frontières

Une représentation est dite représentations par frontières, **Boundary Representation**, ssi est fondée sur la description de la subdivision de la surface frontière des solides en cellules de dimension $0D$, **les sommets**, $1D$, **les arêtes**, et $2D$, **les faces**, et son plongement dans l'espace E^3 .



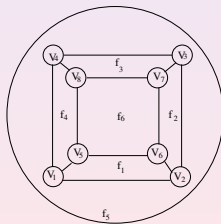
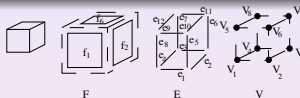
BRepr : Notions de base



BRepr : description à l'aide des graphes planaires

Description à l'aide des graphes planaires : $G = \{V, E\}$

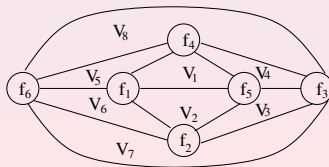
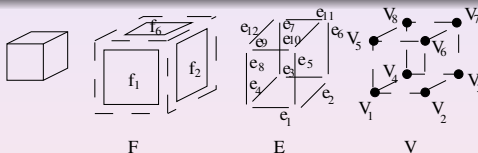
Représentation **BRepr** basée sur le graphe Sommets-Arêtes



BRepr : description à l'aide des graphes planaires

Description à l'aide des graphes planaires : $G = \{F, E\}$

Représentation **BRepr** basée sur le graphe Faces-Arêtes



Formule et opérateurs d'Euler

Formule d'Euler

- Ensembles de sommets **V** (Vertices) , d'arêtes **E** (Edges) et de faces **F** (Faces).
- $V - E + F = 2$
- Polyèdres simples topologiquement corrects \Rightarrow
 $\Rightarrow V - E + F = 2$
- $V - E + F = 2 \not\Rightarrow$ polyèdres simples topologiquement corrects

Formule et opérateurs d'Euler

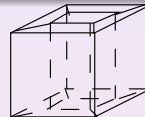
Formule d'Euler pour polyèdres simples



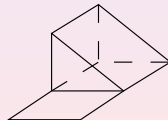
a



b



c



d

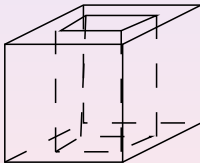
Formule et opérateurs d'Euler

Formule d'Euler-Poincaré

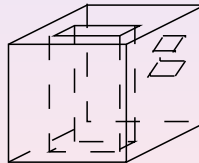
- Ensembles de coquilles **S** (Shells), de trous **H** (Holes) et d'anneaux dans les faces **R** (Rings).
- $V - E + F = 2(S - H) + R$
- Polyèdres topologiquement corrects \Rightarrow
 $\Rightarrow V - E + F = 2(S - H) + R$
- $V - E + F = 2(S - H) + R \not\Rightarrow$ polyèdres topologiquement corrects

Formule et opérateurs d'Euler

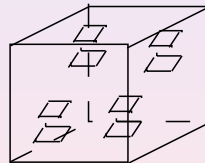
Formule d'Euler-Poincaré



a



b



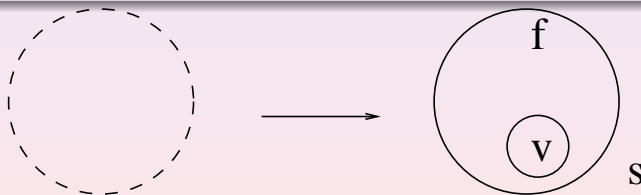
c

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Modèle planaire squelettique.

Primitive squelettique constituée par une coquille s , une face f et un sommet v .



Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

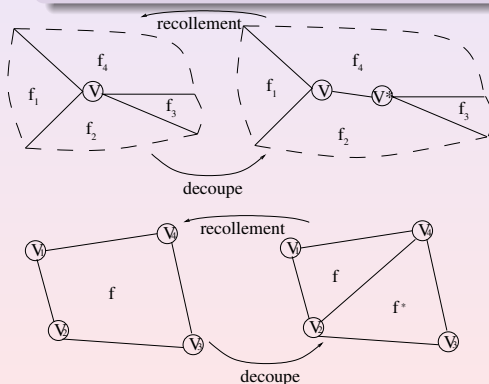
Opérations topologiques locales :

- Découpe et recollement de sommets
- Découpe et recollement de faces

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Découpe et recollement



Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

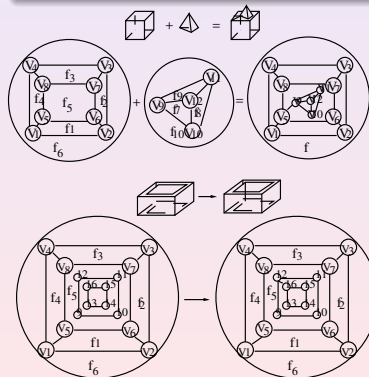
Opérations topologiques globales :

- Somme connexe
- Différence connexe

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Somme et différence



BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

On considère un espace discret de six dimensions où les axes correspondent aux nombres de sommets (V), d'arêtes (E), de faces (F), de trous (H), d'anneaux (R) et de coquilles (S).

Soit un point $\mathbf{P} = \mathbf{P}(v, e, f, h, r, s)$ de cet espace.

Si \mathbf{P} correspond à un polyèdre topologiquement correct il doit vérifier la formule d'Euler-Poincaré.

$$V - E + F = 2(S - H) + R$$

Cette équation définit un sous-espace de dimension cinq, un hyper plan qui contient tous les polyèdres topologiquement corrects.

BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

Sur ce plan on peut choisir une base de cinq vecteurs V_i , $i = 1, \dots, 5$, de telle sorte que :

1. V_i soient colinéaires au plan et
2. V_i soient linéairement indépendants.

Une telle base est définie par les opérateurs d'Euler :

$$V_1 = \text{Mev}(1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$V_2 = \text{Mef}(0, 1, 1, 0, 0, 0)$$

$$V_3 = \text{Mvfs}(1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

$$V_4 = \text{KeMr}(0, -1, 0, 0, 1, 0)$$

$$V_5 = \text{KfMrh}(0, 0, -1, 1, 1, 0)$$

BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

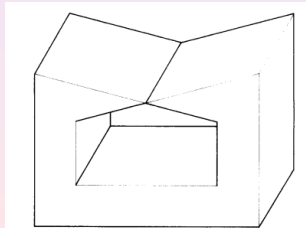
Tout point sur le plan peut être exprimé comme une combinaison linéaire de la base.

En d'autre termes **tout polyèdre topologiquement correct** peut être construit comme **une suite d'opérateurs d'Euler** et la représentation **BRepr** sous-jacente sera valide.

BRepr : Non-ambiguïté

BRepr avec deux arêtes différentes ayant un plongement géométrique identique

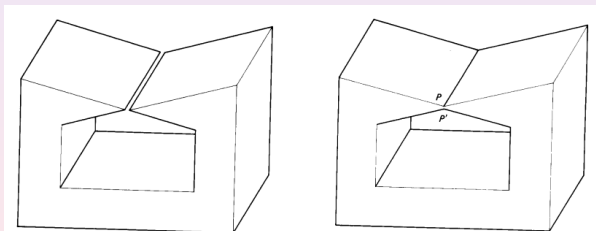
Fig. 4, Ch.Hoffmann et al., "Geometric ambiguities in boundary representations", CAD, V 19, Issue 3, April 1987, Pages 141-147



BRepr : Non-ambiguïté

Deux BReprs correspondant à ce plongement

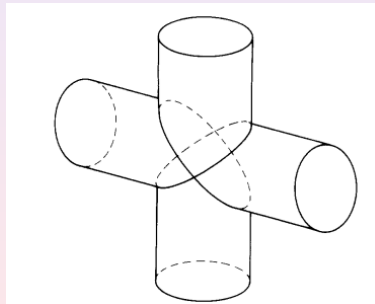
Fig. 5, Ch.Hoffmann et al.



BRepr : Non-ambiguïté

BRepr de surfaces : l'intersection de deux faces n'est pas connexe

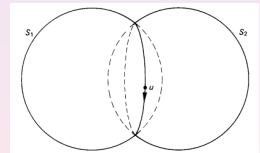
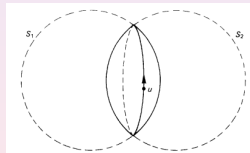
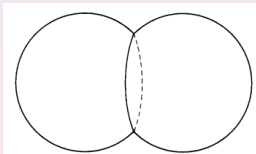
Fig. 3, Ch.Hoffmann et al.



BRepr : Non-ambiguïté

BRepr de surfaces : l'intersection de deux faces est une courbe fermée sans orientation intrinsèque

Fig.2,7,8, Ch.Hoffmann et al.



BRepr : Fermeture

Manipulations des BReprs : Opérateurs d'Euler

- **Make, Kill**
- **vertex, edge, face, shell, hole, rings.**

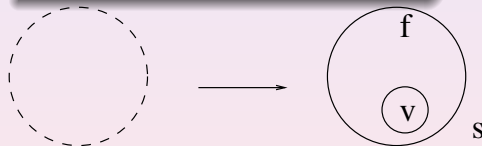
BRepr : Fermeture

| | |
|---|----------------------------------|
| Graphes planaires | Représentations BRepr |
| Manipulations des graphes planaires | Opérateurs d'Euler |
| Modèle planaire squeletique | Mvfs |
| Opérations topologiques locales Découpe de sommets Recollement de sommets Découpe de faces Recollement de faces | Mev Kev Mef Kef KeMr |
| Opérations topologiques globales Somme connexe Différence connexe | KfMrh MfKrh |

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

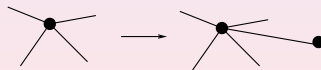
Mvfs : Make vertex, face and shell



BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

Mev : Make edge vertex

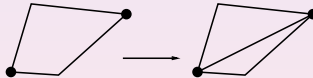
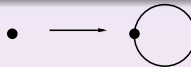


Mev

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

Mef : Make edge face

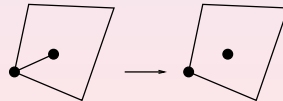
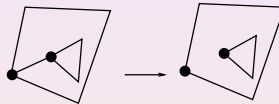
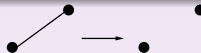


Mef

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

KeMr : Kill edge Make ring

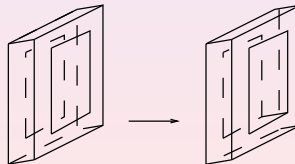
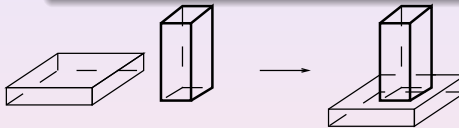


KeMr

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

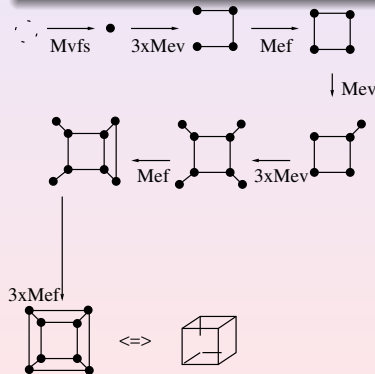
KfMrh : Kill face Make ring hole



KfMrh

BRepr : Description

Construction d'un cube à l'aide des opérateurs d'Euler



BRepr : Description

Opérateurs d'Euler et leurs inverses

| | v | e | f | h | r | s |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| Mev | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Mef | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Mvfs | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| KeMr | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| KfMrh | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |

| | v | e | f | h | r | s |
|------|----|----|----|----|----|----|
| Kev | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Kef | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| Kvfs | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 |
| MeKr | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| MfKr | 0 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 |

BRepr : Densité

Evaluation de la construction des représentations BRepr valides.

Soit **B** la représentation **BRepr** d'un polyèdre **P** topologiquement correct.

B = B(Mev's, Mef's, Mvfs's, KeMr's, KfMrh's)

P = P(v, e, f, h, r, s)

Soit la matrice **M** =

| | | | | | |
|---|----|----|---|----|----|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | -1 | 1 | 2 | -1 | -2 |

Pour évaluer le nombre d'opérateurs d'Euler nécessaires à la construction de **B** il suffit de calculer :
 $[v \ e \ f \ h \ r \ s] \times M^{-1}$

BRepr : Densité

Exemple

Pour un polyèdre $P(v, e, f, h, r, 1)$ on obtient :

$$[v \ e \ f \ h \ r \ 1] \times M^{-1} = [v-1 \ f+h-1 \ 1 \ h \ r-h]^T$$

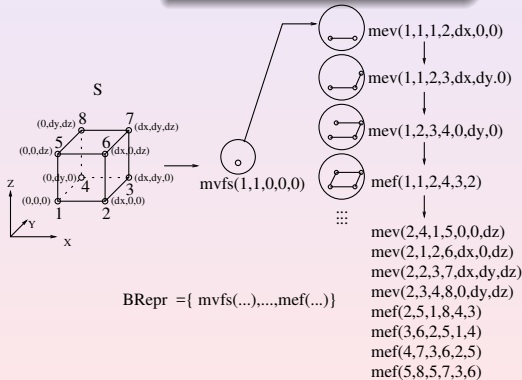
| Mev | Mef | Mvfs | KfMrh | KeMr |
|-----|-------|------|-------|------|
| v-1 | f+h-1 | 1 | h | r-h |

Pour la construction d'un cube $\mathbf{C}(8,12,6,0,0,1)$ on a
 $[8 \ 12 \ 6 \ 0 \ 0 \ 1] \times M^{-1} = [7 \ 5 \ 1 \ 0 \ 0]^T$

BRepr : Facilité d'usage

breprPrimitives.dat

1 0.0 0.0 0.0 1



Structure "arête ailée", B.G.Baumgart, STAN-CS-320, 1972

STANFORD ARTIFICIAL INTELLIGENCE PROJECT
MEMO AIM-179
STAN-CS-320

AD755141

WINGED EDGE POLYHEDRON REPRESENTATION

BY

BRUCE G. BAUMGART

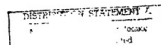


SUPPORTED BY

ADVANCED RESEARCH PROJECTS AGENCY

ARPA ORDER NO. 457

OCTOBER 1972



Reprinted by
NATIONAL TECHNICAL
INFORMATION SERVICE
U.S. GOVERNMENT
PRINTING OFFICE
WASHINGTON, D.C. 20540

COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT
School of Humanities and Sciences

Structure "arête ailée", B.G.Baumgart, STAN-CS-320, 1972

Figure 1.6
FACE PERIMETER - a face is surrounded by edges and vertices.

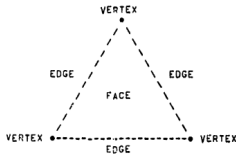


Figure 1.7
VERTEX PERIMETER - a vertex is surrounded by edges and faces.

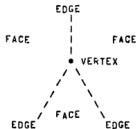


Figure 1.8
EDGE PERIMETER - an edge is surrounded by 2 faces & 2 vertices.



Figure 2.1 - BASIC NODE STRUCTURE.

| BODY-BLOCK | FACE-BLOCK | EDGE-BLOCK | VERTEX-BLOCK |
|------------------|------------------|------------------|--------------|
| -3, part, copart | -3, | -3, | -3, XHC |
| -2, | -2, | -2, | -2, YHC |
| -1, | -1, | -1, | -1, ZHC |
| 0, type | 0, type | 0, type | 0, type |
| +1, nface, pface | +1, nface, pface | +1, nface, pface | +1, |
| +2, ned, ped | +2, ped | +2, ned, ped | +2, ped |
| +3, nvt, pvt | +3, | +3, nvt, pvt | +3, nvt, pvt |
| +4, | +4, | +4, ncw, pcw | +4, |
| +5, | +5, | +5, nccw, pccw | +5, |
| +6, | +6, | +6, | +6, |
| 5 words | 2 words | 6 words | 5 words |

Figure 2.2 - THE WINGED EDGE.
(As viewed from the exterior of a solid).

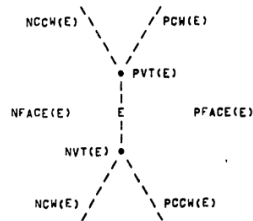
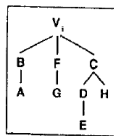
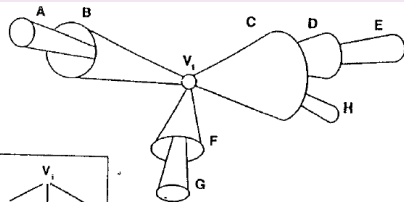
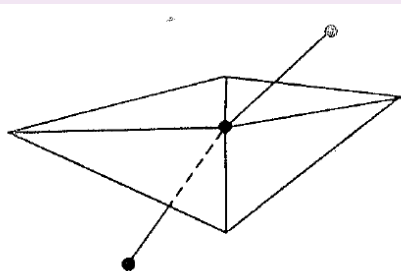


Figure 2.3 - AN ACTUAL NODE STRUCTURE - SEPTEMBER 1972.

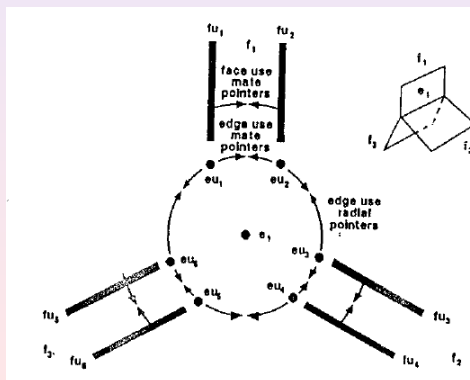
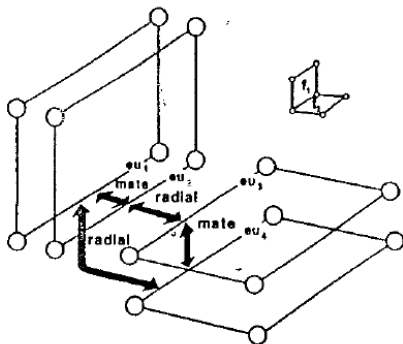
K.Weiler, "The Radial Edge Structure", IFIP, 1988

"Arête Radiale", représentation BRepr. des solides non-variété :
Gauche : Fig.5, Surface de séparation autour d'un sommet ;
Droite : Fig.6, Arborescence de surfaces de séparations.



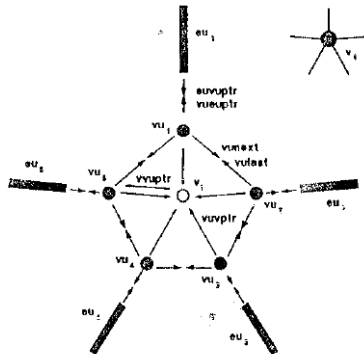
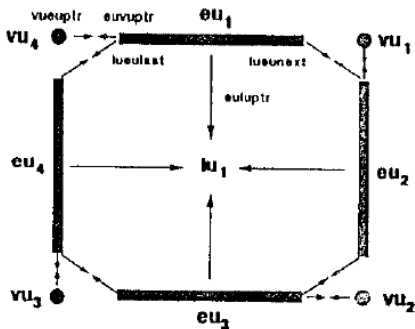
K.Weiler, "The Radial Edge Structure", IFIP, 1988

"Arête Radiale", représentation BRepr. des solides non-variété :
Gauche : Fig.8, Deux faces voisines dans une arête ;
Droite : Fig.9, Trois faces voisines dans une arête.



K.Weiler, "The Radial Edge Structure", IFIP, 1988

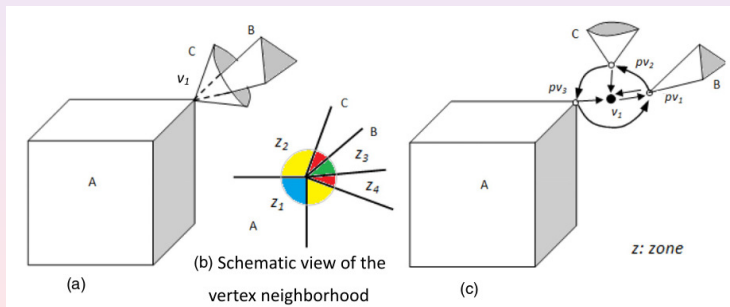
"Arête Radiale", représentation BRepr. des solides non-variété :
Gauche : Fig.10, Cycle d'arêtes dans un contour d'une face ;
Droite : Fig.11, Cycle d'arêtes dans un sommet.



L.Zeng et al., "Q- Complex", CAD, 44(2012)

Représentation d'un sommet non-variété

Fig.9



Pour approfondir

Ian Stroud, "Boundary representation modelling techniques", 2006