



GU : Master 1 MIAGe
 Épreuve de : Recherche Opérationnelle 1
 Date : 16 Décembre 2008, 10h30
 Documents autorisés
 Épreuve de Monsieur Robson

UE : MGE702

Durée : 1h30



1 [5 points]

La matrice donnée est la 997-ème puissance de la matrice de probabilités de transition d'une chaîne de Markov (arrondie).

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.51	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.83	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17
0.20	0.30	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.15	0.00	0.12	0.09	0.00	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.24	0.06	0.00	0.06	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00
0.00	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00
0.00	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.83	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17
0.00	0.00	0.00	0.00	0.51	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.04	0.06	0.00	0.06	0.02	0.03	0.14	0.07	0.00	0.00	0.00	0.39	0.09	0.01	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
0.00	0.00	0.15	0.00	0.05	0.13	0.00	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.34	0.03	0.00	0.03	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00
0.00	0.00	0.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.36	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.00	0.00
0.20	0.30	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.15	0.00	0.17	0.06	0.00	0.00	0.00	0.16	0.01	0.00	0.17	0.08	0.00	0.08	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00

Expliquer ce que vous pouvez déduire, et comment, sur la division des états de la chaîne en classes et éventuellement en sous-classes et les caractéristiques de ces classes (finale, de passage, périodique, etc.).

Réponse

Les probabilités d'arriver dans les états 9, 17, 18 et 21 sont nulles et les lignes 9, 18 et 21 sont identiques mais la ligne 17 est différente. On déduit que l'état 17 est le seul état d'une classe de passage et 9, 18 et 21 sont chacun dans une classe de passage, probablement tous dans une même classe.

Les lignes 1, 2 4 et 15 sont identiques et ont des transitions vers 7 et 12, les lignes 7 et 12 sont identiques avec des transitions vers 8 et 20, les lignes 8 et 20 sont identiques avec des transitions vers 1, 2 4 et 15. On déduit que tous ces états sont dans une classe finale périodique de période 3, dont les sous-classes sont $\{1, 2, 4, 15\}$, $\{7, 12\}$, $\{8, 20\}$.

Par un raisonnement pareil, il y a une autre classe finale et périodique de période 2 avec les sous-classes $\{5, 14, 16\}$, $\{6, 13\}$.

Les lignes 3, 10, 11 et 19 sont identiques et ont des transitions vers 3, 10, 11 et 19. On déduit que ces quatre états constituent une classe finale apériodique.

2 [4 points]

Dans les trois jeux donnés, la première matrice est celle des gains du premier joueur, qui choisit la ligne.

- i. Dans un jeu il y a une stratégie pour un joueur qui en domine une autre : quel jeu, quel joueur et quelle stratégie en domine quelle autre ? Comment sait-on que la stratégie domine l'autre ?

Réponse

Dans le jeu 3, pour le deuxième joueur, la stratégie 2 domine la stratégie 3 parce que, dans la deuxième matrice, chaque élément de la colonne 2 est supérieure à l'élément de la colonne 3 dans la même ligne.

- ii. Dans un autre jeu, il y a un équilibre avec une stratégie pure de chaque joueur : quel jeu et quelle stratégie pour chaque joueur ? Comment sait-on que c'est un point d'équilibre ?

Réponse

Dans le premier jeu, il y a équilibre avec la stratégie 3 de chaque joueur, parce que les éléments $[3, 3]$ sont le maximum de la colonne dans la première matrice et le maximum de la ligne dans la seconde.

i. Jeu numéro 1 $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

ii. Jeu numéro 2 $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

iii. Jeu numéro 3 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

3 [6 points]

Pour le programme linéaire suivant :

Maximiser $-1x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4$ sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 3x_1 + 0x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\leq 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 &\leq 2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0) \end{aligned}$$

Expliquer

- i. l'ajout de variables d'écart,

Réponse

Pour chaque contrainte \leq on ajoute une nouvelle variable pour la transformer en équation. Par exemple la première contrainte devient

$$5x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 8$$

La fonction objective n'est pas changée, c'est-à-dire les coefficients de ces nouvelles variables sont nuls.

- ii. le choix d'un pivot pour la première itération de l'algorithme du simplexe,

Réponse

D'abord on choisit une colonne, c'est-à-dire une variable; elle doit être une variable dont le coefficient dans la fonction objective est (strictement) positif. On choisit, par exemple, x_2 qui a le coefficient positif 2.

Ensuite, on choisit une ligne, c'est-à-dire une contrainte; parmi les contraintes avec un coefficient positif de la variable choisie, on choisit celle dont la valeur constant-de-la-contrainte/coefficient-de-la-variable est le minimum.

le coefficient de la variable dans la contrainte choisie est le pivot.

Dans l'exemple, on considère les première et troisième contraintes. La première a le rapport $8/4 = 2$ et la troisième a $2/2 = 1$. On choisit la troisième contrainte (ligne).

- iii. le processus de pivotage (on ne vous demande pas de faire tous les calculs),

Réponse

On divise la ligne du pivot par le pivot, rendant le pivot égal à 1. Ensuite on soustrait de chaque autre ligne (contrainte et fonction objective) le multiple de la ligne du pivot qui donne une valeur nulle au coefficient de la variable du pivot.

- iv. pourquoi, en général, il est certain que le processus que vous avez décrit

- (a) trouve une nouvelle solution de base si la solution actuelle n'est pas optimale et la fonction objective est bornée,

Réponse

Si la valeur actuelle (nulle) de la fonction n'est pas optimale, il n'est pas possible que tous ses coefficients soient négatifs ou nuls; donc, on peut bien choisir une colonne.

Si la fonction objective est bornée, il existe une contrainte qui empêche la variable choisie d'être incrémentée indéfiniment; donc, il existe au moins un coefficient positif de cette variable dans les contraintes.

Donc, on trouve un pivot et effectue l'opération de pivotage.

- (b) ne diminue pas la valeur de la fonction objective.

Réponse

Les seules variables qui peuvent changer sont les variables de base (à la première itération les variables d'écart), qui ont des coefficients nuls dans la fonction objective, et la variable du pivot, qui était nulle et a un coefficient positif; donc, le changement dans la valeur de la fonction objective ne peut pas être négatif.

4 [5 points]

En prenant pour exemple le problème de recherche d'un flot maximum de A à I dans le réseau dont les sommets sont A, \dots, I et les arêtes (avec leurs capacités) sont

$A \leftrightarrow B$ (2), $A \leftrightarrow C$ (3), $B \leftrightarrow D$ (1), $B \leftrightarrow E$ (1), $C \leftrightarrow E$ (2), $C \leftrightarrow F$ (2), $D \leftrightarrow E$ (1), $D \leftrightarrow G$ (1), $E \leftrightarrow G$ (3), $E \leftrightarrow H$ (2), $F \leftrightarrow E$ (1), $F \leftrightarrow H$ (5), $G \leftrightarrow I$ (4), $H \leftrightarrow I$ (3)

- i. Démontrer comment la recherche d'un flot maximum peut être exprimée par un programme linéaire.

Une réponse possible

- On a une variable pour le flot dans chaque sens dans chaque arête, par exemple x_{DE} et x_{ED} pour les deux directions possibles de l'arête (D, E) ; mais pour les arêtes incidentes à la source on a seulement le sens de départ x_{AB} et x_{AC} , et à la destination le sens d'arrivée x_{GI} et x_{HI} .
- On veut maximiser le flot qui part de A : fonction objective $x_{AB} + x_{AC}$.
- Pour chaque sommet intermédiaire il y a une contrainte que tout ce qui y arrive doit partir, par exemple pour D $x_{DG} + x_{DE} + x_{DB} \geq x_{GD} + x_{ED} + x_{BD}$.

- ii. Expliquer pourquoi ce programme linéaire peut avoir une solution optimale dont les valeurs ne sont pas toutes des entiers.

Réponse

Il y a un flot maximum avec des flots de 1 en $C \rightarrow F$ et $F \rightarrow H$ et de 2 en $C \rightarrow E$ et $E \rightarrow H$; il y a un autre avec 2 en $C \rightarrow F$ et $F \rightarrow H$ et 1 en $C \rightarrow E$ et $E \rightarrow H$;

donc, le moyen des deux est un flot maximum avec 1.5 en $C \rightarrow F$ et $F \rightarrow H$ et 1.5 en $C \rightarrow E$ et $E \rightarrow H$.

- iii. Esquisser une méthode qui sert à prouver qu'il existe au moins une solution optimale dont les valeurs sont toutes des entiers.

Réponse

L'algorithme de Ford et Fulkerson trouve un flot maximum. Il commence avec un flot nul et ajoute, à chaque itération, le flot incrémental maximum possible dans une chaîne augmentante. Tant que le flot reste entier dans chaque arête, le flot incrémental maximum possible doit être entier aussi. Donc (par récurrence sur le nombre d'itérations), le flot trouvé reste entier et, donc, le flot maximum trouvé à la fin est entier.