MIAGe
Master 1:
Recherche Opérationnelle I
TD1: le 9/9/2009

1. Dans la chaîne de Markov, dont la matrice de probabilités de transitions est don née, quelles sont les classes de passage et les classes finales ?

   (Numérotez les états à partir de 1.)

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

   Réponse $\{6, 7\}$ classe finale
   $\{1, 2, 3, 9\}$ classe finale
   $\{5\}$ classe de passage
   $\{4, 8, 10\}$ classe de passage

2. Dans cette chaîne il y a une seule classe finale et cette classe est périodique. Quelle est sa période λ et quelles sont les sous-classes ?

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

   Réponse Période 4
   $\{2, 10\},\ \{6, 7, 8, 9\},\ \{3, 13, 14, 15\},\ \{11, 12\}$

3. On considère la chaîne de la compagnie de livraison décrite dans le cours:

(a) Compléter la matrice de probabilités de transition:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0(b_1+b_2+b_3+b_4) & a_0b_0+a_1(b_1+b_2+b_3+b_4) & a_1b_0+a_2(b_1+b_2+b_3+b_4) & a_2b_0+(a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) & (a_3+a_4)b_0 \\ a_0(b_2+b_3+b_4) & a_0b_1+a_1(b_2+b_3+b_4) & a_0b_0+a_1b_1+(a_2+a_3+a_4)(b_2+b_3+b_4) & a_1b_0+(a_2+a_3+a_4)b_1 & (a_2+a_3+a_4)b_0 \\ a_0(b_3+b_4) & a_0b_2+(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_3+b_4) & a_0b_1+(a_1+a_2+a_3+a_4)b_2 & a_0b_0+(a_1+a_2+a_3+a_4)b_1 & (a_1+a_2+a_3+a_4)b_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que la somme de chaque ligne est égale à 1.
Manipulation simple en utilisant $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1$ et $b_0+b_1+b_2+b_3+b_4=1$.

(c) Calculer les valeurs numériques de la matrice si
$a_0=0.1,\ a_1=0.2,\ a_2=0.3,\ a_3=0.3,\ a_4=0.1$
$b_0=0.1,\ b_1=0.1,\ b_2=0.4,\ b_3=0.2,\ b_4=0.2$

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ .09 & 0.19 & 0.29 & 0.39 & 0.04 \\ 0.08 & 0.17 & 0.59 & 0.09 & 0.07 \\ 0.04 & 0.4 & 0.37 & 0.1 & 0.09 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

(d) Quelle est la probabilité de changer de l'état 2 à l'état 3 en deux transitions ?
(Ici je numérote les états selon le nombre de camions à Bordeaux, c'est-à-dire de 0 à 4.)
$0.08*0.3+0.17*0.39+0.59*0.09+0.09*0.1+0.07*0.1 \ = \ 0.1594$

(e) Ecrire un programme pour calculer $P^{(2)}$

```
main()
{ float P[5][5], temp[5][5],s;
        int i,j,k,m;
        P[0][0]=0.1;P[0][1]=0.2;P[0][2]=0.3;P[0][3]=0.3;P[0][4]=0.1;
        P[1][0]=0.09;P[1][1]=0.19;P[1][2]=0.29;P[1][3]=0.39;P[1][4]=0.04;
        P[2][0]=0.08;P[2][1]=0.17;P[2][2]=0.59;P[2][3]=0.09;P[2][4]=0.07;
        P[3][0]=0.04;P[3][1]=0.4;P[3][2]=0.37;P[3][3]=0.1;P[3][4]=0.09;
        P[4][0]=0.2;P[4][1]=0.2;P[4][2]=0.4;P[4][3]=0.1;P[4][4]=0.1;

        for (i=0;i<5;i++)
                for(j=0;j<5;j++)
                {s=0;
                        for (k=0;k<5;k++) s+= P[i][k]*P[k][j];
                        temp[i][j]=s;
                }
        for (i=0;i<5;i++)
        {
                for(j=0;j<5;j++) printf("%f   ",temp[i][j]);
                printf("\n");
        }
```

```
}
```

```
0.084000   0.249000   0.416000   0.175000   0.076000
0.072900   0.267400   0.413500   0.170200   0.076000
0.088100   0.198600   0.482700   0.159400   0.071200
0.091600   0.204900   0.419300   0.220300   0.063900
0.094000   0.206000   0.431000   0.194000   0.075000
```

(f) Modifier votre programme afin de calculer $P^{(128)}$

```
main()
{ float P[5][5], temp[5][5],s;
        int i,j,k,m;
        P[0][0]=0.1;P[0][1]=0.2;P[0][2]=0.3;P[0][3]=0.3;P[0][4]=0.1;
        P[1][0]=0.09;P[1][1]=0.19;P[1][2]=0.29;P[1][3]=0.39;P[1][4]=0.04;
        P[2][0]=0.08;P[2][1]=0.17;P[2][2]=0.59;P[2][3]=0.09;P[2][4]=0.07;
        P[3][0]=0.04;P[3][1]=0.4;P[3][2]=0.37;P[3][3]=0.1;P[3][4]=0.09;
        P[4][0]=0.2;P[4][1]=0.2;P[4][2]=0.4;P[4][3]=0.1;P[4][4]=0.1;

        for (m=1;m!=128;m*=2)
        {
        for (i=0;i<5;i++)
                for(j=0;j<5;j++)
                {s=0;
                        for (k=0;k<5;k++) s+= P[i][k]*P[k][j];
                        temp[i][j]=s;
                }
        for (i=0;i<5;i++)
                for(j=0;j<5;j++)
                        P[i][j]=temp[i][j];
        }
        for (i=0;i<5;i++)
        {
                for(j=0;j<5;j++) printf("%f   ",temp[i][j]);
                printf("\n");
        }
}
```

```
0.085451   0.219660   0.446916   0.176322   0.071650
0.085451   0.219660   0.446916   0.176322   0.071650
0.085451   0.219660   0.446916   0.176322   0.071650
0.085451   0.219660   0.446916   0.176322   0.071650
0.085451   0.219660   0.446916   0.176322   0.071650
```

(g) Que remarquez-vous dans la matrice $P^{(128)}$?
Toutes les lignes sont pareilles.
(La distribution limite)