

MIAGe

Master 1:

Recherche Opérationnelle I

TD1: le 9/9/2009

1. Dans la chaîne de Markov, dont la matrice de probabilités de transitions est donnée, quelles sont les classes de passage et les classes finales ?

(Numérotez les états à partir de 1.)

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Réponse {6, 7} classe finale
 {1, 2, 3, 9} classe finale
 {5} classe de passage
 {4, 8, 10} classe de passage

2. Dans cette chaîne il y a une seule classe finale et cette classe est périodique. Quelle est sa période λ et quelles sont les sous-classes ?

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Réponse Période 4
 {2, 10}, {6, 7, 8, 9}, {3, 13, 14, 15}, {11, 12}

3. On considère la chaîne de la compagnie de livraison décrite dans le cours:

(a) Compléter la matrice de probabilités de transition:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) & a_0b_0 + a_1(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) & a_1b_0 + a_2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) \\ a_0(b_2 + b_3 + b_4) & a_0b_1 + a_1(b_2 + b_3 + b_4) & a_0b_0 + a_1b_1 + (a_2 + a_3 + a_4)(b_2 + b_3) \\ a_0(b_3 + b_4) & a_0b_2 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(b_3 + b_4) & a_0b_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)b_2 \\ b_4 & b_3 & b_2 \end{pmatrix}$$

(b) Vérifier que la somme de chaque ligne est égale à 1.

Manipulation simple en utilisant $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ et $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$.

(c) Calculer les valeurs numériques de la matrice si

$$a_0 = 0.1, a_1 = 0.2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.3, a_4 = 0.1$$

$$b_0 = 0.1, b_1 = 0.1, b_2 = 0.4, b_3 = 0.2, b_4 = 0.2$$

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ .09 & 0.19 & 0.29 & 0.39 & 0.04 \\ 0.08 & 0.17 & 0.59 & 0.09 & 0.07 \\ 0.04 & 0.4 & 0.37 & 0.1 & 0.09 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

(d) Quelle est la probabilité de changer de l'état 2 à l'état 3 en deux transitions ?

(Ici je numérote les états selon le nombre de camions à Bordeaux, c'est-à-dire de 0 à 4.)

$$0.08 * 0.3 + 0.17 * 0.39 + 0.59 * 0.09 + 0.09 * 0.1 + 0.07 * 0.1 = 0.1594$$

(e) Ecrire un programme pour calculer $P^{(2)}$

```
main()
{ float P[5][5], temp[5][5], s;
  int i,j,k,m;
  P[0][0]=0.1;P[0][1]=0.2;P[0][2]=0.3;P[0][3]=0.3;P[0][4]=0.1;
  P[1][0]=0.09;P[1][1]=0.19;P[1][2]=0.29;P[1][3]=0.39;P[1][4]=0.04;
  P[2][0]=0.08;P[2][1]=0.17;P[2][2]=0.59;P[2][3]=0.09;P[2][4]=0.07;
  P[3][0]=0.04;P[3][1]=0.4;P[3][2]=0.37;P[3][3]=0.1;P[3][4]=0.09;
  P[4][0]=0.2;P[4][1]=0.2;P[4][2]=0.4;P[4][3]=0.1;P[4][4]=0.1;

  for (i=0;i<5;i++)
    for(j=0;j<5;j++)
      {s=0;
        for (k=0;k<5;k++) s+= P[i][k]*P[k][j];
        temp[i][j]=s;
      }
  for (i=0;i<5;i++)
  {
    for(j=0;j<5;j++) printf("%f  ",temp[i][j]);
    printf("\n");
  }
}
```

```

}

0.084000  0.249000  0.416000  0.175000  0.076000
0.072900  0.267400  0.413500  0.170200  0.076000
0.088100  0.198600  0.482700  0.159400  0.071200
0.091600  0.204900  0.419300  0.220300  0.063900
0.094000  0.206000  0.431000  0.194000  0.075000

```

(f) Modifier votre programme afin de calculer $P^{(128)}$

```

main()
{ float P[5][5], temp[5][5], s;
  int i,j,k,m;
  P[0][0]=0.1;P[0][1]=0.2;P[0][2]=0.3;P[0][3]=0.3;P[0][4]=0.1;
  P[1][0]=0.09;P[1][1]=0.19;P[1][2]=0.29;P[1][3]=0.39;P[1][4]=0.04;
  P[2][0]=0.08;P[2][1]=0.17;P[2][2]=0.59;P[2][3]=0.09;P[2][4]=0.07;
  P[3][0]=0.04;P[3][1]=0.4;P[3][2]=0.37;P[3][3]=0.1;P[3][4]=0.09;
  P[4][0]=0.2;P[4][1]=0.2;P[4][2]=0.4;P[4][3]=0.1;P[4][4]=0.1;

  for (m=1;m!=128;m*=2)
  {
  for (i=0;i<5;i++)
    for(j=0;j<5;j++)
      {s=0;
        for (k=0;k<5;k++) s+= P[i][k]*P[k][j];
        temp[i][j]=s;
      }
  for (i=0;i<5;i++)
    for(j=0;j<5;j++)
      P[i][j]=temp[i][j];
  }
  for (i=0;i<5;i++)
  {
    for(j=0;j<5;j++) printf("%f  ",temp[i][j]);
    printf("\n");
  }
}

```

```

0.085451  0.219660  0.446916  0.176322  0.071650
0.085451  0.219660  0.446916  0.176322  0.071650
0.085451  0.219660  0.446916  0.176322  0.071650
0.085451  0.219660  0.446916  0.176322  0.071650
0.085451  0.219660  0.446916  0.176322  0.071650

```

(g) Que remarquez-vous dans la matrice $P^{(128)}$?

Toutes les lignes sont pareilles.

(La distribution limite)