INTRODUCTION

- Nom: J. M. (Mike) Robson;
  robson@labri.fr

- Emploi du temps: 2 heures de cours et 2 heures de TD par semaine

- fichiers de transparents et de TD (et éventuellement des corrigés):
  `http://dept-info.labri.fr/~robson/RO`
  Fichiers au cremi `~jrobson/RO/`

- contrôle continu: projet de programmation
  et
  éventuellement de petites interrogations et
  note d'assiduité en TD : coefficient 40%?

- R.O. branche de math; à voir avec décisions économiques

- traitée ici d'une façon peu rigoureuse mais ...

- cours (normalement) en français

- livres:
  Méthodes d'Optimisation Combinatoire: Charon et al
  Programmation Linéaire: Guéret et al
  Exercices et problèmes Résolus de Recherche Opérationnelle tome 2, Roseaux
  Et pour l'histoire
  La Recherche Opérationnelle: Nobert et al

Matières: techniques mathématiques de décision;

- où est la difficulté de prendre une décision?
- C'est plus difficile quand il s'agit de plusieurs décisions dépendantes?
  interaction entre mes décisions
- ou de décisions de politique à appliquer dans le long terme
  interaction entre mes décisions d'aujourd'hui et celles de l'avenir
- ou de décisions dans un monde nondéterministe
  interaction entre mes décisions et la nature
- ou décisions de moi et une autre personne (un concurrent?); ou plusieurs

- techniques qui dépendent de la construction d'un modèle: la solution donnée par une de ces techniques mathématiques n'est plus valable que notre modèle!

Les Chaînes de Markov (3 prochaines semaines de cours)

Modèles de systèmes qui évoluent dans le temps selon des règles probabilistes

Exemple: jouer au Pile ou Face
D'abord j'ai 3 euros et mon opposant a aussi 3 euros
A chaque tour j'ai une probabilité p de gagner un euro et une probabilité $1-p$ de perdre un euro mais un joueur sans argent ne peut plus miser
L' "état" du système est combien d'argent j'ai (0,1,2,3,4,5 ou 6)
Les transitions possibles sont:

$$1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4, 4 \to 5, 5 \to 6$$

$$1 \to 0, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 3, 5 \to 4$$

$$0 \to 0, 6 \to 6$$

Les propriétés générales

Un ensemble E d'états possibles

Transitions à des moments de temps discrets

Probabilité de transition de l'état i à l'état j (à moment t) ne dépend pas de l'histoire (c-à-d des états antérieurs)

Ici on ne considère que les chaînes finies (nombre d'états fini) et homogènes (probabilité de transition d'état i à l'état j ne dépend pas de t).

Un deuxième exemple: Une petite compagnie de livraison de colis

On considère une compagnie qui possède 4 camions qui sont utilisés pour des livraisons entre Bordeaux et Paris. Selon les demandes reçues chaque matin 0, 1 ou plusieurs camions partent de chaque ville pour arriver dans l'autre ville le soir. Si la demande dépasse le nombre de camions disponibles, les derniers clients partent.

On veut savoir, par exemple, le pourcentage des demandes qui échouent (faute d'assez de camions dans la ville de la demande).

On suppose b_i la probabilité chaque jour d'une demande totale qui nécessite exactement i camions de Bordeaux à Paris et a_i la même probabilité dans la direction inverse.

Et on suppose que les demandes dans les 2 villes sont indépendantes.

Il y a 5 états selon le nombre de camions dans les 2 villes (la nuit).

La probabilité d'une transition d'un état à un autre:

de $(0,4)$ à $(0,4)$: a_0

de $(0,4)$ à $(1,3)$: a_1

de $(1,3)$ à $(0,4)$: $a_0(b_1+b_2+b_3+b_4)$

de $(1,3)$ à $(1,3)$: $a_0b_0 \ + \ a_1(b_1+b_2+b_3+b_4)$

etc.

Les matrices de transitions

On note $P_{i,j}$ la probabilité d'une transition de l'état i à l'état j à un moment et P la matrice de ces probabilités.

Une matrice vérifiant les deux propriétés évidentes: $P_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j et $\sum_j P_{i,j} = 1$ est une

matrice *stochastique*.

Toute matrice stochastique est la matrice d'une chaîne de Markov.

On note $P_{i,j}^{(m)}$ la probabilité d'une transition de l'état i à l'état j dans m transitions et $P^{(m)}$ la matrice de ces probabilités.

Classification des états

Un état i est *persistant* ou *récurrent* si la probabilité d'être une deuxième fois en i après être arrivé en i est 1. (Probabilité $= 1$ n'équivaut pas à *certain*!)
(Pour les chaînes finies) celà équivaut à dire que s'il est possible d'aller de l'état i à un autre état j (éventuellement en plusieurs étapes), il est possible de rentrer de j à i.
Sinon il est *transitoire*

Dans le jeu de Pile ou Face 0 et 6 sont des états persistants; les autres sont transitoires.
Dans le système des camions ça dépend des probabilités: si $a_0 = b_0 = 0$ et les autres probabilités sont non-nulles, 0 et 4 sont des états transitoires et tous les autres sont persistants..

On parle aussi des états *ergodiques*, c'est-à-dire ceux pour lesquels le temps moyen du premier retour à l'état i après être arrivé une fois en i est fini. Pour les chaînes finies il n'y a pas de différence entre persistant et ergodique.

Un état i est *périodique* avec période λ si chaque cycle de i à i comporte un nombre de transitions qui est un multiple de λ (et λ est l'entier maximum (supérieur à 1) avec cette propriété), c'est-à-dire le plus grand diviseur commun des longueurs de tous les cycles qui contiennent i.

Le graphe de transitions

Le graphe dirigé dont les sommets sont les états et les arcs sont les transitions possibles ($P_{i,j} > 0$) permet de trouver les états persistants etc.

Les chemins dans ce graphe correspondent aux transitions possibles en plusieurs étapes (ou 1 ou 0).

Important: les composants fortement connexes (ensemble maximal de sommets tel qu'il existe un chemin de chacun à chaque autre)
Le système entrera (avec probabilité 1) dans un composant sans sortie et ensuite devra y rester; Les états d'un tel composant constituent une petite chaîne où tous les états sont persistants (donc ergodiques)
S'il y a un seul composant fortement connexe la chaîne est *irréductible*
Tous les états d'un composant sont du même type: tous persistants (une classe *finale* d'états) ou tous transitoires (une classe *de passage*);

Décomposition en chaînes simples

Un autre graphe (sommets les composants du premier; arcs correspondant aux transitions entre composants) suffit pour montrer dans quels composants le système peut finir étant donné un état initial

Si l'un des états d'un composant est périodique avec période λ, c'est vrai pour tous.

En ce cas, on peut diviser les états en λ classes: $C_0, C_1, \cdots C_{\lambda-1}$, de telle façon que chaque transition est d'une classe C_i à C_{i+1} (ou de $C_{\lambda-1}$ à C_0); les chemins de longueur λ donnent une chaîne à l'intérieur de chaque C_i où tous les états sont persistants et apériodiques.
L'étude du comportement du système a été réduite à deux questions: l'étude des systèmes ergodiques et apériodiques; et la question de dans quelle sous-chaîne on peut finir et avec quelle probabilité.