MIAGe
Master 1:
Recherche Opérationnelle I
TD1: le 19/9/2007

1. Dans la chaîne de Markov, dont la matrice de probabilités de transitions est donnée, quelles sont les classes de passage et les classes finales?

   (Numérotez les états à partir de 1.)

$$\begin{pmatrix}
0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 \\
0.3 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.9
\end{pmatrix}$$

2. Dans cette chaîne il y a une seule classe finale et cette classe est périodique. Quelle est sa période λ et quelles sont les sous-classes?

$$\begin{pmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\
0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\
0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\
0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{pmatrix}$$

3. On considère la chaîne de la compagnie de livraison décrite dans le cours:

   (a) Compléter la matrice de probabilités de transition:

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & ? & ? & ? \\
a_0(b_1+b_2+b_3+b_4) & a_0b_0 + a_1(b_1+b_2+b_3+b_4) & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & ? & ?
\end{pmatrix}$$

   (b) Vérifier que la somme de chaque ligne est égale à 1.

(c) Calculer les valeurs numériques de la matrice si
$a_0 = 0.1,\ a_1 = 0.2,\ a_2 = 0.3,\ a_3 = 0.3,\ a_4 = 0.1$
$b_0 = 0.1,\ b_1 = 0.1,\ b_2 = 0.4,\ b_3 = 0.2,\ b_4 = 0.2$

(d) Quelle est la probabilité de changer de l'état 2 à l'état 3 en deux transitions?

(e) Ecrire un programme pour calculer $P^{(2)}$

(f) Modifier votre programme afin de calculer $P^{(128)}$

(g) Que remarquez-vous dans la matrice $P^{(128)}$?