



1 [6 points]

i. [2 points]

La chaîne de Markov, dont la matrice de probabilités de transitions est donnée, a une seule classe finale et cette classe est périodique. Quelle est sa période  $\lambda$  et quelles sont les sous-classes ?

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

ii. [4 points]

Décrivez une méthode qui permet de calculer exactement la probabilité asymptotique que le système se trouve dans un état donné après un nombre de transitions  $1 + k\lambda$  quand  $k$  tend vers l'infini étant donné qu'il commence dans l'état 1.

2 [6 points]

Dans l'exécution de l'algorithme du simplexe, on a à chaque itération un ensemble de contraintes dans la forme des équations qu'on peut exprimer dans la forme  $Ax = b$  où  $A$  est une matrice et  $b$  le vecteur de parties droites.

i. [2 points]

Expliquez pourquoi le vecteur  $b$  ne doit jamais avoir aucun élément négatif.

ii. [4 points]

Pourquoi, avec le bon choix d'un pivot, l'opération de pivotage est-elle garantie de ne pas introduire d'éléments négatifs en  $b$  ?

**3** [8 points]

Trois voyageurs veulent aller de la ville 1 à la ville  $n$  par une route qui passe par les villes  $2, 3, \dots, n - 1$  ; il existe un nombre  $m$  de billets disponibles, un seul de chaque type, où billet numéro  $i$  permet d'aller d'une ville de départ  $dep_i$  à une destination  $dest_i$  ( $dest_i > dep_i$ ) à un prix de  $prix_i$ , les valeurs  $dep$ ,  $dest$  et  $prix$  étant stockés dans trois tableaux. Une personne utilisant un billet  $i$  doit commencer son trajet à  $dep_i$  et continuer jusqu'à  $dest_i$ . On veut calculer si le voyage est possible et le coût total minimal des billets.

i. [6 points]

Expliquer comment ce calcul peut être exprimée comme un Programme Linéaire en Nombres Entiers ou comme un programme dynamique.

ii. [2 points]

Laquelle des deux formulations donnerait le calcul le plus efficace ?