Le dual d'un programme linéaire
Motivation

Une solution réalisable d'un programme (de maximisation) donne un z possible, donc un minorant du z optimal.

Je peux aussi déduire des majorants de z par manipulation directe des inéquations:

$$\begin{array}{rrrrrrrccr}
10 & 10 & 20 & 50 & 0 & 40 & 25 & x & <= & 100 \\
50 & 60 & 40 & 0 & 0 & 0 & 15 & & & 100 \\
30 & 50 & 40 & 5 & 5 & 20 & 10 & & & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 30 & 0 & & & 100
\end{array}$$

Si je calcule $2/5\times$ (1) + $2/3\times$ (2), j'obtiens $37.33x_1+44x_2+34.67x_3+20x_4+16x_6+20x_7$ $<= 106.67$

Donc $z = 30x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 15x_6 + 20x_7 <= 106.67$

Quel est le meilleur majorant que je peux trouver de cette façon?

Le problème de base: maximiser $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

avec m contraintes $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j <= b_i$

et $x_j >= 0$

En essayant de trouver un majorant de la solution, j'ai cherché des multiplicateurs y_i pour les contraintes avec les propriétés:

$y_i >= 0$

$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i >= c_j$

Et je veux trouver un ensemble de tels multiplicateurs qui me donne la valeur la plus petite possible de $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$.

Un nouveau programme linéaire!
appelé le dual.

Propriété évidente: chaque solution réalisable du dual est supérieure ou égale à chaque solution réalisable du problème de base.

Le dual du dual

Le dual, à savoir *minimiser* $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ avec les contraintes $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i >= c_j$ équivaut à *maximiser* $\sum_{i=1}^{m} -b_i y_i$ avec les contraintes $\sum_{i=1}^{m} -a_{i,j} y_i <= -c_j$.
(pour l'exprimer en forme canonique)

On a multiplié les deux vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ et la matrice $\mathbf{a}$ par -1, échangé les 2 vecteurs et transposé la matrice.

Donc, si on le fait une deuxième fois pour obtenir le dual du dual, on trouve le problème de base.

Les deux problèmes ont la même solution! (c'est-à-dire la même valeur optimale de la fonction objective)

Le théorème le plus important de la programmation linéaire.

Démonstration compliquée.

Mais, il n'est pas difficile de voir que l'algorithme du simplexe calcule (dans le cas d'un programme faisable et borné) une valeur qui est une solution réalisable des deux problèmes;
En effet, à la fin de l'exécution de l'algorithme, la dernière ligne contient sa valeur initiale (la

fonction objective) moins une somme de multiples des autres lignes; mettons m_j pour le multiple de la ligne j.
En regardant les valeurs finales dans cette dernière ligne, on trouve

- (colonne de la j-ième variable d'écart) $-m_j$; donc on a $m_j >= 0$ par la condition d'arrêt de l'algorithme,

- (colonne de la j-ième variable du programme de départ) $c_j - \sum a_{i,j} m_j$; donc $\sum a_{i,j} m_j >= c_j$ (par la même condition)

- (colonne des constantes) $\sum -c_j m_j$; donc la solution trouvée pour le programme de départ était $\sum c_j m_j$.

C'est-á-dire que les m_j constituent une solution réalisable du programme dual et avec la

même valeur de sa fonction objective que la solution trouvée du programme de départ.
donc, forcément la solution optimale des deux.

Cas dégénérés possibles

On a vu que si lún des deux programmes a une solution optimale, c'est vrai aussi pour l'autre.

Il reste trois cas possibles ou ni l'un ni l'autre a une solution optimale:

- les deux programmes sont infaisables
- le primal est infaisable et le dual a des solutions sans borne
- le primal a des solutions sans borne et le dual est infaisable

L'interprétation économique de la solution du dual

La solution du problème dual (c'est-à-dire les y_i) nous dit par combien la solution optimale (z) va changer si la contrainte (numéro i) est modifiée.
(parce que la valeur trouvée pour z est $\sum_i b_i y_i$)

Si z est mon profit, y_i est le maximum que je devrait payer (par unité) pour lâcher la contrainte (acheter plus d'une matière de base ...)

Un autre algorithme

Celui de Khachiyan (1979) a l'avantage d'être certain de terminer dans un temps polynomial (dans la taille des entrées ...) dans tous les cas.

- Il suffit de pouvoir décider si un programme est faisable ou non (recherche dichotomique peut ensuite donner le résultat exact dans un nombre polynomial d'itérations)

- Toutes les solutions de base (et donc une solution réalisable s'il y en a, même si l'espace de solutions est infini) sont à l'intérieur d'une (hyper-)sphère de taille calculable (et pas trop grande)

- Considérer le point au centre de cette sphère

- S’il est une solution réalisable, le programme est faisable.

- Sinon, toute solution réalisable de bas est à l’intérieur d’une hémisphère bornée par la moitié de la sphère et un plan parallel à la contrainte violée

- Trouver la plus petite ellisoïde qui contient cette hémisphère;

- Et appliquer une transformation linéaire qui transforme cette ellisoïde en une sphère !