

# *Modèles et Approches Formels pour les Systèmes Distribués*

---

# *Modèles et Approches Formels pour les Systèmes Distribués*

---



# *Modèles et Approches Formels pour les Systèmes Distribués*

---

- 
- 
- Algorithmes distribués probabilistes

# *Modèles et Approches Formels pour les Systèmes Distribués*

---

- 
- 
- Algorithmes distribués probabilistes
- Analyse probabiliste des algorithmes distribués

# *Algorithmes distribués probabilistes*

---

- L'algorithme exécuté par les processus est un algorithme probabiliste.

# *Algorithmes distribués probabilistes*

---

- L'algorithme exécuté par les processus est un algorithme probabiliste.
- **Définition** : (algorithme probabiliste) un algorithme où le hasard intervient.
  - Le processus « fait un tirage aléatoire » pour décider des actions à entreprendre;
  - démarrage d'un algorithme est effectué par un processus choisi au hasard;
  - ...

Pourquoi les algorithmes distribués probabilistes ?

- Quand on ne peut pas faire autrement : résultats d'impossibilité à cause des hypothèses sur le système :anonymat  $\Rightarrow$  élection déterministe impossible

Pourquoi les algorithmes distribués probabilistes ?

- Quand on ne peut pas faire autrement : résultats d'impossibilité à cause des hypothèses sur le système :anonymat  $\Rightarrow$  élection déterministe impossible
- parfois plus performants que les algorithmes déterministes.

Pourquoi les algorithmes distribués probabilistes ?

- Quand on ne peut pas faire autrement : résultats d'impossibilité à cause des hypothèses sur le système :anonymat  $\Rightarrow$  élection déterministe impossible
- parfois plus performants que les algorithmes déterministes.
- Plus tolérants aux pannes que les algorithmes déterministes.

# *Analyse probabiliste des algorithmes distribués*

---

- L'algorithme exécuté par le processeur est (ou peut être) déterministe mais l'algorithme exécuté par le système est lui probabiliste.

# *Analyse probabiliste des algorithmes distribués*

- L'algorithme exécuté par le processeur est (ou peut être) déterministe mais l'algorithme exécuté par le système est lui probabiliste.
- Exemples : Les algorithmes distribués dans un système asynchrone. Trois processeurs  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  qui exécutent chacun un ensemble d'instructions :

$p_1 : a \leftarrow 10; \text{afficher}(a);$   
 $p_2 : b \leftarrow 11; \text{afficher}(b);$   
 $p_3 : c \leftarrow b - a; \text{afficher}(c);$

Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

# *Table des matières*

---

- Rappels de probabilités.

# ***Table des matières***

---

- Rappels de probabilités.
- Algorithmes distribués probabilistes.

# ***Table des matières***

---

- Rappels de probabilités.
- Algorithmes distribués probabilistes.
- Analyse probabiliste d'algorithmes distribués.

# ***Table des matières***

---

- Rappels de probabilités.
- Algorithmes distribués probabilistes.
- Analyse probabiliste d'algorithmes distribués.
- Applications :
  - Le problème du rendez-vous.
  - le problème de l'élection locale.
  - Algorithmes d'élection.
  - Résolution de conflits.

## Références

---

- F. DRESS, Probabilités et Statistique, Dunod, 1997.

- F. DRESS, Probabilités et Statistique, Dunod, 1997.
- R. Motwani et P. Raghavan, Randomized Algorithms. Cambridge.

- F. DRESS, Probabilités et Statistique, Dunod, 1997.
- R. Motwani et P. Raghavan, Randomized Algorithms. Cambridge.
- G. Tel, Introduction to Distributed Algorithms, Cambridge Press.

- F. DRESS, Probabilités et Statistique, Dunod, 1997.
- R. Motwani et P. Raghavan, Randomized Algorithms. Cambridge.
- G. Tel, Introduction to Distributed Algorithms, Cambridge Press.
- C. Lavault, Analyse d'algorithmes distribués, Hermès

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique
- Linéarité de l'espérance

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique
- Linéarité de l'espérance
- Variance

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique
- Linéarité de l'espérance
- Variance
- Ecart type

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique
- Linéarité de l'espérance
- Variance
- Ecart type
- Probabilités conditionnelles

# *Rappels de Probabilités*

---

- Distribution de probabilité
- Variable aléatoire
- Espérance mathématique
- Linéarité de l'espérance
- Variance
- Ecart type
- Probabilités conditionnelles
- Lois usuelles

- Exemple : on lance deux dés.

$$\Omega = D \times D = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Avec

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- Exemple : on lance deux dés.

$$\Omega = D \times D = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

Avec

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

- L'espace  $\Omega$  contient  $6 \times 6 = 36$  éléments.

- Distribution uniforme :
  - Tous les éléments de  $\Omega$  sont de même probabilité  $1/36$
  - tous les éléments de  $D$  sont de même probabilité  $1/6$ .

- Distribution uniforme :
  - Tous les éléments de  $\Omega$  sont de même probabilité  $1/36$
  - tous les éléments de  $D$  sont de même probabilité  $1/6$ .
- Définition. Une mesure de probabilité  $P$  est une application de l'ensemble des événements  $\Omega$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , qui satisfait les deux propriétés (ou « axiomes » )

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

- Distribution uniforme :
  - Tous les éléments de  $\Omega$  sont de même probabilité  $1/36$
  - tous les éléments de  $D$  sont de même probabilité  $1/6$ .
- Définition. Une mesure de probabilité  $P$  est une application de l'ensemble des événements  $\Omega$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ , qui satisfait les deux propriétés (ou « axiomes » )

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1.$$

- $\Omega$  : espace des événements élémentaires

- $\Omega$  : espace des événements élémentaires
- $A \in \Omega$  : événement

- $\Omega$  : espace des événements élémentaires
- $A \in \Omega$  : événement
- $P$  : une loi (ou distribution) de probabilité sur  $\Omega$ .  
On prolonge  $P$  sur  $P(\Omega)$  par :  
$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad \forall A \subset \Omega.$$

- $\Omega$  : espace des événements élémentaires
- $A \in \Omega$  : événement
- $P$  : une loi (ou distribution) de probabilité sur  $\Omega$ .  
On prolonge  $P$  sur  $P(\Omega)$  par :  

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega), \quad \forall A \subset \Omega.$$
- Proposition :

$$P(\emptyset) = 0; \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i),$$

pour toute famille au plus dénombrable  $A_i, i \in I$  d'éléments de  $P(\Omega)$  2 à 2 disjoints.

## *Exemple : Problème du rendez-vous*

---

- Chaque processus  $p$  choisit uniformément un de ses voisins;

## *Exemple : Problème du rendez-vous*

---

- Chaque processus  $p$  choisit uniformément un de ses voisins;
- Si le nombre de voisins est  $n$ , quelle est la probabilité qu'il choisisse un processus  $q$  en particulier ?

## *Exemple : Problème du rendez-vous*

---

- Chaque processus  $p$  choisit uniformément un de ses voisins;
- Si le nombre de voisins est  $n$ , quelle est la probabilité qu'il choisisse un processus  $q$  en particulier ?
- Quelle est la probabilité pour que deux processus voisins  $p$  et  $q$  se choisissent mutuellement ?

## *Exemple : Problème du rendez-vous*

---

- Chaque processus  $p$  choisit uniformément un de ses voisins;
- Si le nombre de voisins est  $n$ , quelle est la probabilité qu'il choisisse un processus  $q$  en particulier ?
- Quelle est la probabilité pour que deux processus voisins  $p$  et  $q$  se choisissent mutuellement ?
- Quelle est la probabilité pour  $p$  d'obtenir un rendez-vous avec un de ses voisins ?

- Soient  $A, B$  deux éléments de  $P(\Omega)$  :
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors :  
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Soient  $A, B$  deux éléments de  $P(\Omega)$  :
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors :  
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Généralisation : Principe d'inclusion-exclusion

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \cdots \\ &\quad - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned}$$

- Définition : Soit  $(\Omega, Pr)$  un espace probabilisé discret et soit  $\Omega'$  un ensemble non vide au plus dénombrable. Une variable aléatoire (v.a.)  $X$  à valeurs dans  $\omega'$  est une application de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ . Nous prenons souvent pour  $\Omega'$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{R}$ .

On pourra munir  $\Omega'$  d'une loi de probabilité  $P_X$  en posant, pour tout  $\omega \in \Omega'$  :

$$P_X(\omega) = P(X^{-1}(\{\omega\}))$$

- Définition : Soit  $(\Omega, Pr)$  un espace probabilisé discret et soit  $\Omega'$  un ensemble non vide au plus dénombrable. Une variable aléatoire (v.a.)  $X$  à valeurs dans  $\omega'$  est une application de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ . Nous prenons souvent pour  $\Omega'$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  ou de  $\mathbb{R}$ .

On pourra munir  $\Omega'$  d'une loi de probabilité  $P_X$  en posant, pour tout  $\omega \in \Omega'$  :

$$P_X(\omega) = P(X^{-1}(\{\omega\}))$$

- Proposition :  $P_X$  est une loi de probabilité sur  $\Omega'$ ,  $\sum_{\omega \in \Omega'} P_X(\omega) = 1$ .

Nous avons de plus, pour tout  $A \in \Omega'$  :

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)).$$

- Pour tout processus  $p$ , on définit la v.a.  $X_p(k)$  comme la v.a. qui compte le nombre de sommets avec qui  $p$  a obtenu un rendez-vous au bout de  $k$  rounds.

- Pour tout processus  $p$ , on définit la v.a.  $X_p(k)$  comme la v.a. qui compte le nombre de sommets avec qui  $p$  a obtenu un rendez-vous au bout de  $k$  rounds.
- Calculer  $P(X_p(k) = m)$

# *Espérance Mathématique*

---

- Une v.a. admet un certain nombre de valeurs typiques. Nous considérons dans la suite les v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

# *Espérance Mathématique*

---

- Une v.a. admet un certain nombre de valeurs typiques. Nous considérons dans la suite les v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Définition : En arithmétique, la valeur moyenne de  $n$  nombres est définie par leur somme divisée par  $n$ . En calcul des probabilités, l'espérance d'une v.a. est définie comme la somme des valeurs prises pondérées par les probabilités respectives, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

lorsque cette somme converge absolument. ( $X(\Omega)$  est l'ensemble des valeurs prises par la v.a.  $X$ ). Sinon, on dit que  $X$  n'admet pas d'espérance.

## *Exemple : Problème du rendez-vous*

(3)

- Quelle est l'espérance du temps que mettra  $p$  pour obtenir un rendez-vous ?

- Quelle est l'espérance du temps que mettra  $p$  pour obtenir un rendez-vous ?
- Si tous les processus du système appliquent le même algorithme, quelle est l'espérance du nombre de rendez-vous dans tout le système ?

- Quelle est l'espérance du temps que mettra  $p$  pour obtenir un rendez-vous ?
- Si tous les processus du système appliquent le même algorithme, quelle est l'espérance du nombre de rendez-vous dans tout le système ?
- ...

# *Linéarité de l'espérance*

---

- Proposition : Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. définies sur le même espace probabilisé discret  $(\Omega, P)$  et admettant toutes deux une espérance. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

# *Linéarité de l'espérance*

---

- Proposition : Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. définies sur le même espace probabilisé discret  $(\Omega, P)$  et admettant toutes deux une espérance. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

- Que peut-on dire de l'espérance d'un produit de v.a. ?

- Définitions : Soit les v.a.  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé discret  $(\Omega, P)$ . La loi (ou distribution) conjointe est la donnée de

$$P_{XY}(X = x, Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\})$$

pour tout  $x$  et tout  $y$  possibles.  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes, si pour tout  $x$  et tout  $y$  possibles, on a  $P_{XY}(X = x, Y = y) = P_X(x)P_Y(y)$ .

- Définitions : Soit les v.a.  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé discret  $(\Omega, P)$ . La loi (ou distribution) conjointe est la donnée de

$$P_{XY}(X = x, Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\})$$

pour tout  $x$  et tout  $y$  possibles.  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes, si pour tout  $x$  et tout  $y$  possibles, on a  $P_{XY}(X = x, Y = y) = P_X(x)P_Y(y)$ .

- Proposition : Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes admettant une espérance, alors la v.a. produit  $XY$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- Définition : la quantité qui mesure la dispersion d'une v.a.  $X$  définie sur  $(\Omega, P)$  est la variance. Elle est définie par

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

- Définition : la racine carrée de la variance est appelée écart-type et est notée par  $\sigma$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

- Définition : la racine carrée de la variance est appelée écart-type et est notée par  $\sigma$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

- Proposition : Nous avons :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Définition : la racine carrée de la variance est appelée écart-type et est notée par  $\sigma$  :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

- Proposition : Nous avons :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- Proposition : Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes admettant chacune une variance, alors la v.a.  $X + Y$  admet une variance qui est la somme des deux variances.

- Définitions : Deux événements  $A$  et  $B$  sont dit indépendants, si :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Une famille  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , d'événements est dite indépendante dans son ensemble, si pour tout sous-ensemble  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

- Définitions : Deux événements  $A$  et  $B$  sont dit indépendants, si :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Une famille  $A_i, i = 1, \dots, n$ , d'événements est dite indépendante dans son ensemble, si pour tout sous-ensemble  $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

- Remarque : Pour démontrer l'indépendance d'une famille  $A_i, i = 1, \dots, n$ , il suffit de prouver que les  $A_i$  sont 2 à 2 indépendants.

# Probabilités conditionnelles

---

- C'est une notion introduite pour formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement  $B$  sachant qu'un autre  $A$  s'est produit.

# Probabilités conditionnelles

---

- C'est une notion introduite pour formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement  $B$  sachant qu'un autre  $A$  s'est produit.
- Remarque :  $B$  conditionné par  $A$  n'implique pas que  $A$  précède nécessairement  $B$  (dans l'ordre chronologique).

# Probabilités conditionnelles

---

- C'est une notion introduite pour formaliser le concept de la probabilité de l'occurrence d'un événement  $B$  sachant qu'un autre  $A$  s'est produit.
- Remarque :  $B$  conditionné par  $A$  n'implique pas que  $A$  précède nécessairement  $B$  (dans l'ordre chronologique).
- Exemple : Un dé uniforme est lancé et nous savons que le point obtenu est pair (événement  $A$ ). Quelle est la probabilité pour que le point soit au moins 4 (événement  $B$ ) ?

- Il est clair que le nouvel espace (conditionné par l'événement  $A$ ) sur lequel les événements élémentaires sont à définir est  $\Omega' = A$ , qui contient 3 éléments. Or, la portion de  $A$  qui est en même temps favorable à  $B$  en contient 2. Il est donc raisonnable de définir la probabilité de  $B$  conditionné par  $A$  par le ratio  $2/3$ .

- Définition : Soit  $(\Omega, Pr)$  un espace probabilisé discret et soit  $A$  un événement de probabilité non nulle. On définit sur  $P(\Omega)$ , l'application  $P(\cdot | A)$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par :

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \forall B \in P(\Omega).$$

- Définition : Soit  $(\Omega, Pr)$  un espace probabilisé discret et soit  $A$  un événement de probabilité non nulle. On définit sur  $P(\Omega)$ , l'application  $P(\cdot | A)$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par :

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \forall B \in P(\Omega).$$

- On appelle  $P(B | A)$  probabilité conditionnelle de  $B$  sachant  $A$ .

- Proposition : Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une partition de  $\Omega$ . Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B \mid A_i), \forall B \in P(\Omega).$$

- Proposition : Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une partition de  $\Omega$ . Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B \mid A_i), \forall B \in P(\Omega).$$

- Exemple : On lance deux dés uniformes. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut 8 ?

- Proposition : Soit  $A_1, A_2, \dots, A_n$  une partition de  $\Omega$ . Si chacun de ces ensembles est de probabilité non nulle, alors :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B \mid A_i), \forall B \in P(\Omega).$$

- Exemple : On lance deux dés uniformes. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un double sachant que la somme des points vaut 8 ?

# ***Espérance conditionnelle***

---

- Soit  $X$  une v.a. et soit  $A$  un événement de probabilité non nulle. L'espérance de  $X$  sachant  $A$  est définie par :

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \mathbb{E}_{P(\cdot|A)}(X).$$

ou

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

## *Espérance conditionnelle (2)*

---

- Exemple : Quelle est l'espérance d'un dé uniforme sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à 3 ?

## ***Espérance conditionnelle (2)***

---

- Exemple : Quelle est l'espérance d'un dé uniforme sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à 3 ?
- Soit  $X$  la v.a. associée au lancer du dé. L'événement  $A$  associé à la condition est l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ . La probabilité de la condition  $A$  est  $1/2$ . L'espérance conditionnelle recherchée vaut :

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right] = 2$$

## ***Quelques distributions discrètes***

---

- **Loi de Bernoulli.** La v.a.  $X$  prend deux valeurs : 1 avec probabilité  $p$  et 0 avec la probabilité  $q$ ; on suppose que  $p, q \in [0, 1]$  et  $p + q = 1$ . Nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = pq, \quad \sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

## • *Quelques distributions discrètes*

- Loi de Bernoulli. La v.a.  $X$  prend deux valeurs : 1 avec probabilité  $p$  et 0 avec la probabilité  $q$ ; on suppose que  $p, q \in [0, 1]$  et  $p + q = 1$ . Nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = pq, \quad \sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

- Utilisation : Cette loi intervient souvent de façon implicite lorsqu'on veut traiter une probabilité comme une espérance. En effet c'est la loi de la v.a. qui est la fonction indicatrice d'un événement  $A$  de probabilité  $p$  :

$$P(A) = \mathbb{E}(1_A).$$

## • *Quelques distributions discrètes*

- Loi de Bernoulli. La v.a.  $X$  prend deux valeurs : 1 avec probabilité  $p$  et 0 avec la probabilité  $q$ ; on suppose que  $p, q \in [0, 1]$  et  $p + q = 1$ . Nous avons :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = pq, \quad \sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

- Utilisation : Cette loi intervient souvent de façon implicite lorsqu'on veut traiter une probabilité comme une espérance. En effet c'est la loi de la v.a. qui est la fonction indicatrice d'un événement  $A$  de probabilité  $p$  :

$$P(A) = \mathbb{E}(1_A).$$

- Loi binomiale. On effectue  $n$  épreuves identiques et indépendantes; la probabilité de succès dans chacune étant supposée égale à  $p$  et celle d'échec à  $q = 1 - p$ .

Posons  $X =$  le nombre total de succès obtenus dans les épreuves.

- Loi binomiale. On effectue  $n$  épreuves identiques et indépendantes; la probabilité de succès dans chacune étant supposée égale à  $p$  et celle d'échec à  $q = 1 - p$ .

Posons  $X$  = le nombre total de succès obtenus dans les épreuves.

- $X$  est une v.a. qui peut prendre la valeur  $k$  dans l'intervalle  $[0, n]$  avec la probabilité :

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On dit alors que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

- Loi géométrique. Soit  $p > 0$  la probabilité de succès dans une épreuve, et  $q = 1 - p$ . Nous répétons la même épreuve indépendamment jusqu'à l'obtention du premier succès.

- Loi géométrique. Soit  $p > 0$  la probabilité de succès dans une épreuve, et  $q = 1 - p$ . Nous répétons la même épreuve indépendamment jusqu'à l'obtention du premier succès.
- Soit  $X$  la v.a. désignant le nombre d'épreuves effectuées. C'est une v.a. qui peut prendre la valeur  $k$  (entier naturel non nul) avec la probabilité  $p_k = P(X = k) = q^{k-1}p$ . On dit que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .

- Loi géométrique. Soit  $p > 0$  la probabilité de succès dans une épreuve, et  $q = 1 - p$ . Nous répétons la même épreuve indépendamment jusqu'à l'obtention du premier succès.
- Soit  $X$  la v.a. désignant le nombre d'épreuves effectuées. C'est une v.a. qui peut prendre la valeur  $k$  (entier naturel non nul) avec la probabilité  $p_k = P(X = k) = q^{k-1}p$ . On dit que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .
- 

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

- Loi de Poisson. Cette distribution intervient dans l'étude du nombre d'événements intervenant dans un intervalle de temps (file d'attente).

- Loi de Poisson. Cette distribution intervient dans l'étude du nombre d'événements intervenant dans un intervalle de temps (file d'attente).
- Une v.a.  $X$  suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda$ , si  $X$  peut prendre la valeur  $k$  avec la probabilité :

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- Loi de Poisson. Cette distribution intervient dans l'étude du nombre d'événements intervenant dans un intervalle de temps (file d'attente).
- Une v.a.  $X$  suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda$ , si  $X$  peut prendre la valeur  $k$  avec la probabilité :

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- 

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathbb{V}(X) = \lambda, \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$