

# Université Bordeaux 1

## Licence Semestre 3 - Algorithmes et structures de données 1

Dernière mise à jour effectuée le 16 Septembre 2013

---

### Introduction

---

- [Complexité](#)
  - [Pointeur](#)
  - [Récursivité](#)
  - [Type abstrait](#)
  - [Conteneur](#)
  - [Implémentation](#)
- 

## 1. Complexité

**Définition 1.1.** L'**efficacité** d'un algorithme est mesuré par son coût (**complexité**) en temps et en mémoire.

Un problème **NP-complet** est un problème pour lequel on ne connaît pas d'algorithme correct efficace c'est à dire réalisable en temps et en mémoire. Le problème le plus célèbre est le **problème du voyageur de commerce**.

L'ensemble des problèmes NP-complets ont les propriétés suivantes :

- Si on trouve un algorithme efficace pour un problème NP complet alors il existe des algorithmes efficaces pour tous,
- Personne n'a jamais trouvé un algorithme efficace pour un problème NP-complet,
- personne n'a jamais prouvé qu'il ne peut pas exister d'algorithme efficace pour un problème NP-complet particulier.

La complexité d'un algorithme se mesure en calculant

- le nombre d'opérations élémentaires,
- la taille de la mémoire nécessaire,

pour traiter une donnée de taille  $n$ .

Dans ce qui suit, nous considérerons que la complexité des instructions élémentaires les plus courantes sur un ordinateur ont un temps d'exécution que l'on considèrera dans ce cours comme constant égal à 1.

Ce qui intéresse fondamentalement l'algorithmique c'est l'ordre de grandeur (au voisinage de l'infini) de la fonction qui exprime le nombre d'instructions ou la taille de la mémoire.

**Définition 1.2.** On définit les trois complexités suivantes :

- Complexité dans le pire des cas

$$C^>_A(n) = \max\{C_A(d), d \text{ donnée de taille } n\}$$

- Complexité dans le meilleur des cas

$$C_A^<(n) = \min\{C_A(d), d \text{ donnée de taille } n\}$$

o Complexité en moyenne

$$\bar{C}_A(n) = \sum_{d \text{ instance de } A} \text{Pr}(d) C_A(d)$$

où  $\text{Pr}(d)$  est la probabilité d'avoir en entrée une instance  $d$  parmi toutes les données de taille  $n$ .

Soit  $D_n$  l'ensemble des instances de taille  $n$ . Si toutes les instances sont équiprobables, on a

$$\bar{C}_A(n) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{d \text{ instance de } A} C_A(d)$$

---

## 2. Pointeur

**Définition 1.3.** Un **pointeur** est une variable qui contient une adresse mémoire directe ou relative.

On écrit pour déclarer un pointeur

```
nom_pointeur = ^type_predefini;
```

Par convention un pointeur qui ne donne accès à aucune adresse contient la valeur NIL.

Pour accéder à l'emplacement mémoire désigné par le pointeur on écrit le pointeur suivi de  $\wedge$ . La primitive **new** permet d'allouer dynamiquement de la mémoire au cours d'une exécution. On écrira

```
new(nom_pointeur);
```

Lorsque la mémoire n'est plus utilisée par le pointeur il faut impérativement la libérer. La primitive **delete** permet de libérer la mémoire allouée par l'intermédiaire d'un pointeur, on écrira

```
delete(nom_pointeur);
```

## 3. Récursivité

**Définition 1.4.** Lorsqu'un algorithme contient un appel à lui-même, on dit qu'il est récursif. Lorsque deux algorithmes s'appellent l'un l'autre on dit que la récursivité est croisée

### Visibilité d'une variable

Une variable **V** locale est visible à l'intérieur du bloc où elle est déclarée. Une variable globale est visible de partout

### Exemple

Soit la fonction **P** suivante

```
fonction f():vide  
  var i:entier;  
  début
```

```

    i = 5;
    afficher(i);
    fin
finfonction

fonction appel()
    début
    i = 3;
    afficher(i);
    f();
    début
    var j:entier;
    i = 4;
    afficher(i);
    fin
    fin
finfonction

```

## Complexité

Un algorithme récursif nécessite de conserver les contextes récursifs des appels. Par suite, la récursivité peut conduire à une complexité mémoire plus grande qu'un algorithme itératif.

### Exemple

Soit les deux fonctions calculant la factorielle :

```

fonction facRecur(val n:entier):entier;
    début
    si n==0 alors
        retourner(1)
    sinon
        retourner(n*facRec(n-1))
    finsi
    fin
finfonction

fonction facIter(val n:entier):entier;
    début
    var i,p:entier;
    p=1;
    pour i=2 à n faire
        p=p*i;
    finpour
    retourner(p)
    fin
finfonction

```

La fonction *facIter* est meilleure en temps et mémoire ([voir](#)).

**Définition 1.5.** Un algorithme récursif présente une récursivité terminale si et seulement si la valeur retournée par cet algorithme est une valeur constante ou un appel à la fonction.

L'algorithme *facRecur* ne présente pas de récursivité terminale.

### Exemple

```

fonction facRecurTerm(val n:entier;val res:entier):entier;
    début
    si n==0 alors
        retourner(res)
    sinon
        retourner(facRecurTerm(n-1,n*res))
    finsi
    fin

```

```
finfonction
```

L'algorithme *facRecurTerm* présente une récursivité terminale. La factorielle se calcule par l'appel *facRecurTerm(n, 1)*

L'intérêt d'une récursion terminale est que les compilateurs détectent cette propriété et optimisent le stockage de l'environnement de la fonction. Ainsi *facRecurTerm* aura une complexité identique à *facter*.

**ATTENTION.** Dans le cas d'un algorithme présentant deux appels récursifs, rendre la récursivité terminale ne permet pas obligatoirement au compilateur d'obtenir une complexité inférieure.

## Exemple

```
fonction fiboIter(val n:entier):entier;
  var i,f1,f2:entier;
  début
    si n==0 alors
      retourner(0);
    sinon
      f1=0;f2=1;
      pour i=2 à n faire
        tmp=f1+f2;
        f1=f2;
        f2=tmp;
      finpour
      retourner(f2)
    fin
  finfonction

fonction fiboRecTerm(val n:entier;val res:entier):entier;
  début
    casou
      n == 0 : retourner(res)
      n == 1 : retourner(res+1)
      autrement : retourner(fiboRecTerm(n-1, fiboRecTerm (n-2, res)));
    fincasou
  fin
  finfonction
```

l'appel s'effectue par *fiboRecTerm(n,0)*.

---

Dans ce qui précède, lors de l'appel de la fonction, le paramètre est précédé du mot **val**. Ce mot clé indique que le paramètre est passé par valeur. La valeur fournie à l'appel sera recopié dans le paramètre dans l'environnement de la fonction.

On peut faire précéder le paramètre du mot clé **ref**. Ce mot clé indique que le paramètre est passé par référence. C'est l'adresse du (ou encore le pointeur vers le) paramètre fourni à l'appel qui sera copiée dans l'environnement de la fonction.

Voir un exemple [ici](#).

---

## 4. Type abstrait

**Définition 1.6.** Un **type abstrait** est un triplet composé :

- o d'un nom,
- o d'un ensemble de valeurs,
- o d'un ensemble d'opérations (souvent appelé primitives) définies sur ces valeurs.

D'un point de vue complexité, on considère que les primitives (à part celle d'initialisation si elle existe) ont une complexité de temps et de mémoire en  $O(1)$ . Pour désigner un type abstrait on utilise une chaîne de caractères.

### Exemple

Les nombres complexes ne sont pas des types de bases. On peut les définir comme un type abstrait :

- nom : *nombreComplexe*
- ensemble de valeur : *réel X réel*
- primitives :
  - multiplication : (nombreComplexe X nombreComplexe) → nombreComplexe
  - addition : (nombreComplexe X nombreComplexe) → nombreComplexe
  - module : nombreComplexe → réel

---

## 5. Conteneur

**Définition 1.7.** Une **conteneur** est un type abstrait permettant de représenter des collections d'objets ainsi que les opérations sur ces objets.

Les collections que l'on veut représenter peuvent être ordonnées ou non ordonnées, numériques ou non. L'ordre est parfois fourni par un événement extérieur. Les collections d'objets peuvent parfois contenir des éléments identiques.

### Accès

valeur : conteneur → objet

### Modification

creerConteneur: conteneur → vide  
ajouter : conteneur X objet → vide  
supprimer : conteneur X objet → vide  
destruireConteneur : conteneur → vide

### Exemple

Un ensemble de nombres complexes peut être défini par un conteneur dont les objets sont des *nombreComplexe*.

---

## 6. Implémentation

**Définition 1.8.** L'implémentation consiste à choisir une structure de donnée et les algorithmes associés pour réaliser un type abstrait.

La structure de donnée utilisée pour l'implémentation peut elle-même être un type abstrait. L'implémentation doit respecter la complexité des primitives à part celle d'initialisation (celle-ci ne s'exécutera qu'une fois).

### Exemple

Le type abstrait *nombreComplexe* peut être implémenté de la manière suivante :

```
type nombreComplexe=structure
    r:réel;
```

```

        i:réel;
    finstructure
fonction op:*(val a,b:nombreComplexe):nombreComplexe;
    var c:nombreComplexe;
    début
        c.r=a.r*b.r-a.i*b.i;
        c.i=a.r*b.i+a.i*b.r;
        retourner(c)
    fin
fonction op:+(val a,b:nombreComplexe):nombreComplexe;
    var c:nombreComplexe;
    début
        c.r=a.r+b.r;
        c.i=a.i+b.i;
        retourner(c)
    fin
fonction module(val a:nombreComplexe):réel;
    début
        retourner(sqrt(a.r*a.r+a.i*a.i))
    fin

```

## Exemple

Un conteneur de nombreComplexe peut être implémenté par un tableau de nombreComplexe.

```

conteneur d'objet=tableau[1..N]de
    structure
        v:objet;
        b:booleen;
    finstructure

```

## Modification

```

fonction creerConteneur(ref T:conteneur de nombreComplexe):vide;
    var i:entier;
    début
        pour i allant de 1 à N faire
            T[i].b=faux;
        finPour;
    fin
fonction ajouter(ref C: conteneur de nombreComplexe;val x:nombreComp]
    var i:entier;
    début
        i=1;
        tant que i<n et C[i].b faire
            i=i+1;
        fintantque
        si i<=n alors
            C[i].v=x;
            C[i].b=vrai
        finsi
    fin
fonction supprimer(ref C: conteneur de nombreComplexe;val x:nombreCon
    var i:entier;
    début
        i=1;
        tant que i<=n et C[i].v!=x faire
            i=i+1;
        fintantque
        si i<=n alors
            C[i].b=faux
        finsi
    fin
fonction detruireConteneur(ref C : conteneur de nombreComplexe):vide
    début
        pour i allant de 1 à N faire
            C[i].b=faux;
        finPour;
    fin

```

## Accès

```

fonction valeur(ref C : conteneur de nombreComplexe):nombreComplexe;
/* retourne le premier nombre complexe */
var i:entier;
début
  i=1;
  tant que i<n et !C[i].b faire
    i=i+1;
  fintantque
  si i<=n alors
    retourner(C[i].v)
  sinon
    retourner(NULL)
  fin si
fin

```

---

## 7. Quelques remarques importantes

Soit B une expression booléenne, **ne jamais écrire**

```
si B alors retourner(vrai) sinon retourner(faux) fin si
```

**On écrit toujours**

```
retourner(B)
```

Ne pas confondre la valeur **NIL** qui est une valeur de pointeur et signifie que le pointeur est non affecté avec la valeur **NULL** qui correspond à une valeur de la variable sans signification.

### Exemple

Le type abstrait nombreComplexe peut être implémenté en utilisant la valeur NULL de la manière suivante:

```
conteneur de NombreComplexe=tableau[1..N]de nombreComplexe;
```

### Modification

```

fonction creerConteneur(ref T:conteneur de nombreComplexe):vide;
var i:entier;
début
  pour i allant de 1 à N faire
    T[i]=NULL;
  finPour;
fin

```

Un excellent exercice consiste à réécrire les toutes les fonctions du container puis à l'implémenter en C.