Université Bordeaux 1

Licence Semestre 3 - Algorithmes et structures de données 1

Dernière mise à jour effectuée le 1 Septembre 2013

Arbres

1. Arbre et arborescence

Définition 4.1. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

Un sous arbre est un sous graphe d'un arbre.

Propriété 4.2. Si un arbre a n sommets alors il a n-1 arêtes.

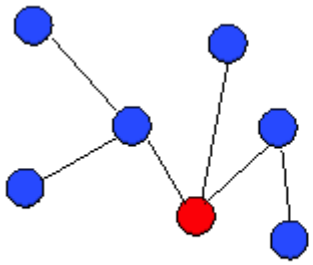
Idée de la démonstration
Ceci s'appuie sur les deux propriétés suivantes des graphes connexes.
- Tout graphe connexe ayant n sommets a au moins n-1 arêtes.
- Tout graphe connexe ayant n sommet et au moins un cycle a au minimum n arêtes.

La taille d'un arbre est le nombre de sommets de l'arbre.

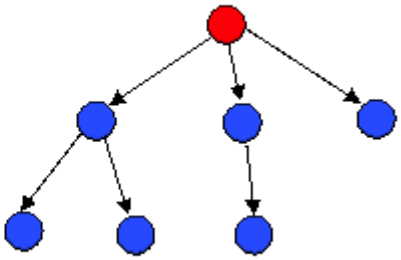
Propriété 4.3. Entre deux sommets quelconques d'un arbre, il existe une unique chaîne les reliant.

Idée de la démonstration
Pour deux sommets quelconques:
- Il ne peut exister deux chaines différentes les reliant sinon il y aurait un cycle dans l'arbre.
- Il existe au moins une chaine puisque un arbre est un graphe connexe.

Définition 4.4. Une **arborescence** est définie à partir d'un arbre en choisissant un sommet appelé **racine** et en orientant les arêtes de sorte qu'il existe un chemin de la racine vers tous les autres sommets.



Arbre



Arborescence

On appele *fils* d'un sommet *s* tout sommet s' tel que (s,s') est une arête de l'arbre.
On notera qu'une arborescence est un exemple d'ensemble partiellement ordonné (relation d'ordre "fils de").
On appelle *feuille* de l'arbre un sommet qui n'a pas de successeur . Tout autre sommet est appelé *sommet interne*.
On appelle *hauteur* d'un sommet de l'arbre la longueur du chemin de la racine à ce sommet.

> **Définition 4.5.** Un **arbre planaire** est défini en ordonnant les arêtes sortantes de chaque sommet.

On notera qu'un arbre planaire est un exemple d'ensemble totalement ordonné (relation "est fils ou est frère à droite").

> **Définition 4.6.** Un **arbre binaire** est un arbre planaire dont chaque sommet a au plus deux fils.
>
> **Définition 4.7.** Un arbre binaire **complet** est un arbre binaire dont chaque sommet interne a exactement deux fils.
>
> **Propriété 4.8.** Tout sommet x d'un arbre binaire vérifie l'une des deux propriétés suivantes:
> - x est une feuille,
> - x a un sous arbre binaire dit *gauche* de racine G(x) et un sous arbre binaire *droit* de racine D(x).
>
> **Définition 4.9.** Un arbre binaire **parfait** est un arbre binaire complet dans lequel toutes les feuilles sont à la même hauteur dans l'arbre.
>
> **Théorème 4.10**Un arbre binaire de taille *n* a une hauteur est moyenne $log_2(n)$.
>
> **Théorème 4.11** Il existe une bijection qui transforme un arbre planaire ayant *n* sommet en un arbre binaire complet ayant *2n+1* sommets.

2. Arbres binaires

Du fait de ce théorème, on ne considère dans un premier temps que le type arbre binaire que l'on nommera arbreBinaire. Chaque sommet permet d'accéder à deux sommets : le fils gauche et le fils droit. Ce type sera nommé **sommet**. Chaque sommet permet également d'accéder à l'objet qu'il stocke. Un arbre binaire peut être vu comme un curseur indiquant le sommet racine. De la même manière un sommet est un curseur. On a donc

```
arbreBinaire=curseur;
sommet=curseur;
```

Le type sommet présente les primitives suivantes :

- accès

```
fonction getValeur(val S:sommet):objet;
/* vaut NIL si le sommet n'existe pas /*
fonction filsGauche(val S:sommet):sommet;
/* vaut NIL si S n'a pas de fils gauche */
fonction filsDroit(val S:sommet):sommet;
/* vaut NIL si S n'a pas de fils droit */
fonction pere(val S:sommet):sommet;
/* vaut NIL si S est la racine de l'arbre */
```

- modification

```
fonction setValeur(ref S:sommet;val x:objet):vide;
/* affecte au sommet S la valeur x */
fonction ajouterFilsGauche(ref S:sommet,val x:objet):vide;
/* filsGauche(S)==NIL doit être vérifié */
fonction ajouterFilsDroit(ref S:sommet,x:objet):vide;
/* filsDroit(S)==NIL doit être vérifié */
fonction supprimerFilsGauche(ref S:sommet):vide;
/* filsGauche(S) est une feuille */
fonction supprimerFilsDroit(ref S:sommet):vide;
/* filsDroit(S) est une feuille */
fonction detruireSommet(ref S:sommet):vide;
/* S est une feuille */
```

Il faut par ailleurs pouvoir créer la racine d'un arbre on a donc de plus la primitive

```
fonction créerArbreBinaire(val Racine:objet):sommet;
```

Détection de feuille

```
fonction estFeuille(val S:sommet):booléen;
  début
    retourner(filsGauche(S)==NIL et filsDroit(S)==NIL)
  fin
```

Construction d'un arbre binaire à partir d'un tableau d'entiers

On choisit de remplir l'arbre de haut en bas et de gauche à droite (*parcours hiérarchique*).

```
fonction remplirTableauArbre(ref T:tableau[1..N] d'entier):
                arbreBinaire d'entier;
  var A:arbreBinaire d'entier;
  var F: file de sommet;
  var s:sommet;
  var i:entier;
  début
    créerFile(F);
    A=créerArbreBinaire(T[1]);
    enfiler(F,A);
    tmp=2;
    tantque 2*tmp-1<=N faire
      pour i=tmp à 2*tmp-1 par pas de 2 faire
        s=valeur(F);
        defiler(F);
        ajouterFilsGauche(s,T[i]);
        enfiler(filsGauche(s));
        ajouterFilsDroit(s,T[i+1]);
        enfiler(filsDroit(s));
      finpour;
      tmp=tmp*2;
    fintantque
    pour i=tmp à N par pas de 2 faire
```

```
      s=valeur(F);
      defiler(F);
      ajouterFilsGauche(s,T[i]);
      ajouterFilsDroit(s,T[i+1]);
    finpour;
    si N mod 2 !=0 alors
      ajouterFilsGauche(valeur(F),T[N])
    finsi
    detruireFile(F);
    retourner(A);
  fin
```

---

3. Parcours d'un arbre binaire

Le parcours d'un arbre binaire consiste à donner une liste de sommets dans l'arbre. Le *prototype* d'algorithme ci-dessous permet d'effectuer les parcours suivant les algorithmes associés aux *traitements* à partir d'un sommet de l'arbre.

```
fonction parcoursArbreBinaire(val A:arbreBinaire d'objet):vide;
//    Déclarations locales
    début
//    traitement1;
      si estFeuille(A)alors
//      traitement2
      sinon
//      traitement3;
         si filsGauche(A)!=NIL alors
//        traitement4;
          parcoursArbreBinaire(filsGauche(A));
//        traitement5;
        finsi
//      traitement6;
        si filsDroit(A)!=NIL alors
//        traitement7
          parcoursArbreBinaire(filsDroit(A));
//        traitement8;
        finsi
//      traitement9;
      finsi
//    traitement10;
   fin
```

Complexité: si le traitement$_i$ a pour complexité $c_i(n)$, soit

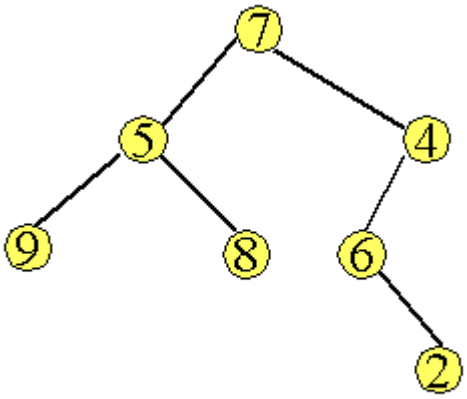
$$c(n) = \sum_{i=1}^{7} c_i(n)$$

. La complexité intrinsèque de l'algorithme est O(n c(n)).

On distingue quatre parcours qui conditionnent les algorithmes sur les arbres binaires. Le parcours hiérarchique (voir paragraphe précédent) ainsi que les suivants :

- *Parcours préfixe* On liste la racine, les sommets du sous arbre gauche, puis les sommets du sous arbre droit.
- *Parcours infixe* On liste les sommets du sous arbre gauche, puis la racine puis les sommets du sous arbre droit.
- *Parcours suffixe* On liste les sommets du sous arbre gauche, puis les sommets du sous arbre droit puis la racine.

Exemple



- Parcours préfixe :7 5 9 8 4 6 2
- Parcours infixe : 9 5 8 7 6 2 4
- Parcours suffixe : 9 8 5 2 6 4 7

Affichage des valeurs des sommets pour un parcours donné

Soit un arbre étiquetté par des entiers. On considère que l'on dispose de la fonction suivante qui affiche un entier n sur le terminal

```
fonction afficher(val n:entier):vide;
```

- *Affichage dans le parcours préfixe*

```
pas de déclarations locales.
traitement 2, 3 : afficher(valeur(A));
```

- *Affichage dans le parcours infixe*

```
pas de déclarations locales.
traitement 2, 6: afficher(valeur(A));
```

- *Parcours suffixe*

```
pas de déclarations locales.
traitement 2, 9 : afficher(valeur(A));
```

Hauteur d'un arbre binaire

```
fonction hauteurArbreBinaire(val s:sommet):entier
  début
    si estFeuille(s)alors
      retourner(0)
    sinon
      var tmp1,tmp2:entier;
      tmp1=0;
      tmp2=0;
      si filsGauche(s)!=NIL alors
        tmp1= hauteurArbreBinaire(filsGauche(s));
      finsi
      si filsDroit(s)!=NIL alors
        tmp2=hauteurArbreBinaire(filsDroit(s));
      finsi
      retourner(1+max(tmp1,tmp2));
    finsi
 fin
```

Taille d'un sous-arbre d'un arbre binaire complet.

```
fonction tailleArbreBinaire(val A: arbreBinaire):entier;
  var tmp:entier;
  début
    si estFeuille(A) alors
      retourner(1)
    sinon
      retourner(1+tailleArbreBinaire(filsGauche(A))
                 +tailleArbreBinaire(filsDroit(A))
    finsi
  fin
```

---

4. Implémentation du type arbreBinaire

L'mplémentation se fait par allocation dynamique. On définit

```
cellule=structure
          info:objet;
          gauche:sommet;
          droit:sommet;
          pere:sommet;
        finstructure
sommet=^cellule;
```

On a alors

- accès

```
fonction valeur(val S:sommet):objet;
  début
    retourner(S^.info);
  fin
fonction filsGauche(val S:sommet):sommet;
  début
    retourner(S^.gauche)
  fin
```

- modification

```
fonction créerArbreBinaire(val racine:objet):sommet;
  var tmp:sommet;
  début
    new(tmp);
    tmp^.info=racine;
    tmp^.gauche=NIL;
    tmp^.droit=NIL;
    tmp^.pere=NIL;
    retourner(tmp)
  fin

fonction ajouterFilsGauche(ref S:sommet,val x:objet):vide;
  var tmp:sommet;
  début
    new(tmp);
    tmp^.info=x;
    tmp^.gauche=NIL;
    tmp^.droit=NIL;
    tmp^.pere=S;
    S^.gauche=tmp;
  fin

fonction supprimerFilsGauche(ref S:sommet):vide;
  var tmp:sommet;
  début
    tmp=S^.gauche;
```

```
        S^.gauche=NIL;
        delete(tmp);
      fin
```

---

5. Retour sur les arbres planaires

On peut définir un type abstrait sommetArbrePlanaire par les primitives suivantes:

- accès

```
fonction valeur(val S:sommetArbrePlanaire):objet;
fonction premierFils(val S:sommetArbrePlanaire):sommetArbrePlanaire;
fonction frere(val S:sommetArbrePlanaire):sommetArbrePlanaire;
fonction pere(val S:sommetArbrePlanaire):sommetArbrePlanaire;
```

- modification

```
fonction créerArborescence(val racine:objet):sommetArbrePlanaire;
fonction ajouterFils(ref S:sommetArbrePlanaire,val x:objet):vide;
/* ajoute un fils comme cadet */
fonction supprimerSommet(ref S:sommetArbrePlanaire):vide;
/* le sommet doit être une feuille */
```

Un arbre planaire est de type sommetArbrePlanaire.

6. Parcours d'un arbre planaire

Le parcours d'un arbre planaire consiste à donner une liste de tous les sommets. Le *prototype* d'algorithme ci-dessous permet d'effectuer les parcours suivant les algorithmes associés aux *traitements* à partir d'un sommet de l'arbre planaire.

```
fonction parcoursArbrePlanaire(val A:sommetArbrePlanaire):vide;
//  Déclarations locales
   var f: sommetArbrePlanaire;
   début
//    traitement1;
      f= premierFils(A);
      tant que f!=NIL faire
//        traitement2;
          parcoursArbrePlanaire(f);
//        traitement3;
          f=frere(f);
//        traitement4
      fintantque
//    traitement5
   fin
```

On distingue trois parcours qui conditionnent les algorithmes sur les arbres planaires. Le parcours hiérarchique qui s'effectue grâce à une file ainsi que

- *Parcours préfixe* On liste la racine, les sommets de chaque sous arbre dans l'ordre où les sous arbres apparaisssent.
- *Parcours suffixe* On liste les sommets des sous arbres en ordre inverse puis la racine.

Exemple

- Parcours préfixe :7 5 9 8 4 6 2
- Parcours suffixe : 9 8 5 2 6 4 7

7. Implémentation du type arbrePlanaire

Implémentation dans le type arbreBinaire

L'implémentation dans le type arbreBinaire découle du théorème 4.11. Pour un noeud donné :

- la primitive filsGauche donne accès au premier fils du noeud.
- la primitive filsDroit donne accès au frère du noeud.
- la primitive pere donne accès soit au père du noeud soit à son frère précédent.

Implémentation par allocation dynamique

Cette implémentation permet de diminuer le temps d'accès au père.

```
cellule=structure
          info:objet;
          premierFils:sommet;
          frère:sommet;
          père:sommet;
        finstructure
```

On peut vérifier aisément que les primitives sont toutes réalisables en O(1). L'espace mémoire est le même que celui occupé par une implémentation dans le type arbreBinaire.