

# Sujet de mémoire de Master 2

proposé par Géraud Sénizergues

Décembre 2011

## 1 Responsables

Nom: Géraud Sénizergues; tel: 05-40-00-35-26; email: ges@labri.u-bordeaux.fr

Équipe: Méthodes Formelles

Thème: Logiques, graphes et langages.

Financement: Inexistant.

## 2 Titre du sujet: Equations et langages formels

Les équations en mots sont étudiées depuis les années 1960. Le célèbre théorème de Makanin ([1]) établit que l'on peut décider, étant donné un système d'équations, s'il admet une solution ou non. Depuis les années 1970, ce résultat fondateur a été amélioré tant du point de vue de la complexité des algorithmes que du point de vue de la généralité du résultat: extension au groupe libre ([2], [3]), aux monoides partiellement commutatifs libres [4], théorèmes de transfert de la résolubilité [5]. L'étude de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation est beaucoup plus récente ([6],[7],[8]) et il reste beaucoup de mystères à élucider dans ce domaine. Le mémoire ([9]) a fait un pas vers la description de cette structure par des automates en établissant que, dans le cas des systèmes d'équations quadratiques, l'ensemble des solutions est un langage d'index.

## 3 Description du travail souhaité

- Dégager de la littérature les résultats affirmant que telle classe d'équations définit des ensembles de solutions ayant telle structure.
- Essayer de donner des résultats de structure dans certains cas particuliers:
  - cas des équations à au plus  $p$  variables ( $p \leq 3$ )
  - équations générales, mais sous-ensemble des solutions d'exposant majoré par un entier fixe  $e \in \mathbf{N}$ .
- Essayer de déduire de la description par Plansdowski de l'ensemble des solutions d'une équation en mots ([8]), une description au moyen d'automates.

## References

- [1] G.S. Makanin. The problem of solvability of equations in a free semigroup. *Math. Sbornik*, 103:147–236, 1977. In Russian; English translation in *Math. USSR Sbornik 32, 1977*.
- [2] G.S. Makanin. Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Math.* 46:1199–1273, 1983. In Russian; English translation in *Math. USSR Izvestija 21, 1983*.
- [3] V. Diekert, C. Hagenah, and C. Gutierrez. The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. *TOCS*, pages 1–45, 2005.
- [4] V. Diekert, Y. Matiyasevich, and A. Muscholl. Solving word equations modulo partial commutations. *Theoretical Computer Science*, 224(1–2):215–235, 1999.
- [5] M. Lohrey and G. Sénizergues. Theories of HNN-extensions and amalgamated products. In *Proceedings ICALP’06*, volume 4052 of *LNCS*, pages 504–515. Springer-Verlag, 2006.
- [6] G.S. Makanin. Finite parametrization of solutions of equations in a free monoid. I. *Mat. Sb.*, 195(2):41–90, 2004.
- [7] G.S. Makanin. Finite parametrization of solutions of equations in a free monoid. II. *Mat. Sb.*, 195(4):65–96, 2004.
- [8] Wojciech Plandowski. An efficient algorithm for solving word equations (extended abstract). In *STOC’06: Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 467–476. ACM, New York, 2006.
- [9] M. Guedj. Equations et langages formels, le cas quadratique. *Mémoire de Master 2, le cas quadratique*, pages 1–64, 2007.
- [10] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Chapter by Volker Diekert.
- [11] Robert Dąbrowski and Wojtek Plandowski. On word equations in one variable. In *Mathematical foundations of computer science 2002*, volume 2420 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 212–220. Springer, Berlin, 2002.
- [12] Robert Dąbrowski and Wojtek Plandowski. Solving two-variable word equations (extended abstract). In *Automata, languages and programming*, volume 3142 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 408–419. Springer, Berlin, 2004.