Programmation 3 : feuille 2

Fonctionnelles

Exercice 2 .1 *Première fonctionnelle*

1. Écrire la fonction qui, étant donnée une fonction f passée en paramètre, renvoie $f(1)$.
2. L'appliquer à $f(x) = 3x^2 + 4.7$.

Exercice 2 .2

1. Écrire la fonction `sigma (f n p)` qui calcule $\sum_{i=n}^{p} f(i)$, pour une fonction $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$.
2. Tester votre fonction avec des fonctions nommées et des fonctions anonymes.

Exercice 2 .3

1. Écrire la fonction qui, étant donnée une valeur n, construit la fonction qui multiplie un nombre par n.
2. Définir la fonction qui double son argument.

Exercice 2 .4

1. Écrire la fonction qui donne une approximation de la dérivée.
2. Généraliser aux dérivées n-ièmes en utilisant la fonction précédente.
3. Vous devriez remarquer que l'application répétitive de l'approximation de la dérivée n'est pas un algorithme efficace pour trouver la n-ième dérivée. En utilisant les formules suivantes :
$$F''(x) = \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$
$$F^{(3)}(x) = \frac{-F(x-2h) + 2F(x-h) - 2F(x+h) + F(x+2h)}{2h^3} + O(h^2)$$
écrire la fonction qui donne une approximation de la première à la troisième dérivée. Comparer les résultats avec ceux de la dernière fonction.

Exercice 2 .5 *Généralisation de l'exercice 2.2*

1. Écrire $\mathrm{OP}_{i=n}^{p} f(i)$, pour une fonction $f : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R}$ et une opération OP binaire quelconque.
Faire une version récursive (une version itérative sera envisagée dans une prochaine feuille).
2. Définir la fonction factorielle à l'aide de la fonction précédente.

3. Définir une fonction qui approxime e en utilisant le fait que :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sum_{i=1}^{n} 1/i!) = e.$$

4. On complique un peu : Écrire une fonction permettant de calculer la somme $\Sigma_{i=0}^{p} f(i)x^i/i!$ (*On rappelle que* $x^0 = 0! = 1$)
5. Application : utiliser la fonction précédente pour calculer une valeur approchée de $\cos x$ en utilisant la formule :

$$1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! \ldots + (-1)^p x^{2p}/(2p)!$$

Exercice 2 .6

Soient f et g deux fonctions définies sur les entiers et à valeur numérique. On définit le produit de f et g par

$$(f \otimes g)(n) = f(0)g(n) + f(1)g(n-1) + \ldots f(n)g(0)$$

1. Définir une fonction `produit (f g n)`, qui calcule $(f \otimes g)(n)$.
2. Donner un exemple d'utilisation de la fonctionnelle suivante ?

```
(defun produit-fun (f g)
  (lambda (n) (produit f g n)))
```

3. Pourquoi se limiter à l'addition et à la multiplication dans la partie droite de la formule de $f \otimes g$?