

## Ordres

### Exercice 1

Sur l'ensemble des cases d'un damier carré, on définit la relation  $R$  par  $c R c'$  si l'on peut aller de la case  $c$  à la case  $c'$  en se déplaçant de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls).  $R$  est-elle une relation d'ordre? Si oui, l'ordre est-il total ou partiel? Et si l'on interdit certaines cases du damier?

### Exercice 2

Une relation  $R$  définie dans un ensemble  $E$  est dite **includ**e dans une relation  $S$  (définie sur le même ensemble) si pour tous éléments  $x$  et  $y$  de  $E$

$$x R y \Rightarrow x S y$$

Dans ce cas, parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies?

- 1 - Si  $R$  est un ordre, alors  $S$  aussi.
- 2 - Si  $S$  est un ordre, alors  $R$  aussi.

Et, en supposant que  $R$  et  $S$  sont bien des ordres :

- 3 - Si  $R$  est un ordre total, alors  $S$  aussi.
- 4 - Si  $S$  est un ordre total, alors  $R$  aussi.
- 5 - Si  $R$  est un ordre bien fondé, alors  $S$  aussi.
- 6 - Si  $S$  est un ordre bien fondé, alors  $R$  aussi.

### Exercice 3

Dans certains ouvrages, on trouve les définitions suivantes :

- Une relation  $R$  sur un ensemble  $E$  est *irréflexive* si pour tout  $x$  dans  $E$ , on a  $\neg(x R x)$ .
- Une relation d'*ordre strict* sur  $E$  est une relation transitive et irréflexive sur  $E$ .

1. Cette définition est-elle cohérente avec celle du cours? En quel sens?
2. Peut-on remplacer « irréflexive » par « non réflexive »? Pourquoi?

### Exercice 4

On considère un ensemble quelconque  $E$  muni d'un ordre partiel  $\leq$ . On suppose que  $E$  contient un élément  $e$  à la fois maximal et minimal pour l'ordre  $\leq$ . Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est vraie? Justifier.

1. Ce n'est pas possible : un tel ensemble n'existe pas.
2.  $E$  n'a qu'un élément.
3.  $E$  a au moins deux éléments incomparables.
4. Soit  $E$  n'a qu'un élément, soit il possède au moins deux éléments incomparables.

**Exercice 5**

On note habituellement  $A^*$  l'ensemble de tous les mots que l'on peut former avec les lettres d'un alphabet  $A$ , et  $|u|$  la longueur d'un mot  $u$ . Montrer que la relation  $\preceq$  définie sur  $A^*$  par

$$u \preceq v \Leftrightarrow \text{soit } |u| < |v|, \text{ soit } u = v$$

est un ordre sur  $A^*$ . Cet ordre est-il total? bien fondé?

**Exercice 6**

Montrer que l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{N}^2$  est bien fondé mais l'ordre lexicographique sur  $A^*$  n'est pas bien fondé.

**Exercice 7**

Comment peut-on numéroter tous les mots sur un alphabet fini? À quel ordre sur les mots correspond cette numérotation?

**Exercice 8**

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des fonctions partielles de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . On définit la relation  $\preceq$  dans  $\mathcal{F}$  par

$$f \preceq g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \\ \forall x \in \text{Dom}(f) \quad f(x) = g(x) \end{cases}$$

1. Montrer que  $\preceq$  est un ordre partiel.
2. Peut-on construire pour  $\preceq$  une suite infinie croissante? une suite infinie décroissante? une antichaîne (ensemble d'éléments deux à deux incomparables) infinie?
3. Quels sont les éléments maximaux, minimaux de  $(\mathcal{F}, \preceq)$ ? Y a-t-il un plus grand élément? un plus petit élément?