
Logique

Exercice 1

Soient P , Q et R des propositions quelconques. Dans chacun des cas suivants, montrer qu'on peut déduire logiquement la conclusion C de l'hypothèse H (on pourra utiliser les résultats obtenus comme règles dérivées) :

1. $H = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ et $C = (P \Rightarrow R)$
2. $H = P \Rightarrow Q$ et $C = \neg P \vee Q$
3. $H = \neg P \vee Q$ et $C = P \Rightarrow Q$
4. $H = \neg P \vee \neg Q$ et $C = \neg(P \wedge Q)$
5. $H = \neg(P \wedge Q)$ et $C = \neg P \vee \neg Q$
6. $H = \neg\neg P$ et $C = P$
7. $H = P \vee Q \Rightarrow R$ et $C = (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
8. $H = (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$ et $C = P \vee Q \Rightarrow R$
9. $H = P \wedge \neg Q$ et $C = \neg(P \Rightarrow Q)$
10. $H = \neg(P \Rightarrow Q)$ et $C = P \wedge \neg Q$

Exercice 2

Une proposition est une **tautologie** si on peut la prouver sans faire d'hypothèse particulière. Lesquelles des propositions ci-dessous sont des tautologies ?

1. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$
2. $((P \Rightarrow Q) \vee (R \Rightarrow S)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (R \vee S))$
3. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Exercice 3

Pour quelles valeurs de l'entier n la formule $((n = 1) \Rightarrow (n = 2))$ est-elle vraie ?
Même question pour $((n = 1) \Leftrightarrow (n = 2))$.

Exercice 4

Soit P un prédicat binaire. On pose

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x \in A, \forall y \in A, P(x, y) \\ F_2 &= \forall y \in A, \forall x \in A, P(x, y) \\ F_3 &= \forall x \in A, P(x, x) \\ F_4 &= \forall x \in A, \exists y \in A, P(x, y) \\ F_5 &= \exists y \in A, \forall x \in A, P(x, y) \\ F_6 &= \exists x \in A, P(x, x) \end{aligned}$$

Quelles relations d'implication logique y a-t-il entre ces différentes formules ?

Exercice 5

Exprimer comme des formules logiques les déclarations suivantes :

1. “Si vous allez tous au cinéma ce soir, je viendrai aussi.”
2. “Si je décide d’aller ce soir au cinéma, c’est sûr que vous viendrez tous.”
3. “Si je trouve quelqu’un pour m’accompagner, j’irai ce soir au cinéma.”
4. “Si je vais ce soir au cinéma, je trouverai bien quelqu’un pour m’accompagner.”

On notera $A(x)$ le prédicat “ x ira ce soir au cinéma” et B la formule “j’irai ce soir au cinéma”.

Exercice 6

Traduire le raisonnement suivant en logique du premier ordre. Est-il valide ?

- Un prof est content si tous ses étudiants sont attentifs.
- Donc un prof sans étudiants est content.

Exercice 7

Soient P et Q deux prédicats unaires. Dans chacun des cas suivants, montrer qu’on peut déduire la conclusion C de l’hypothèse H :

1. $H = (\exists x \in A, P(x)) \Rightarrow (\forall y \in B, Q(y))$ et $C = \forall x \in A, \forall y \in B, P(x) \Rightarrow Q(y)$
2. $H = (\exists x \in A, x = x)$ et $C = (\forall x \in A, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in A, P(x))$
3. $H = (\forall x \in A, x \neq x)$ et $C = (\forall x \in A, P(x))$
4. $H = (\exists x \in A, x \neq x)$ et $C = (1789 = 1515)$

Exercice 8

Traduire en logique du premier ordre la proposition “Dans tout bistrot non vide, on peut trouver quelqu’un qui, s’il boit, alors tout le monde boit”. Est-ce une tautologie ?