

Mots et langages

Exercice 1

On pose $A = \{a, b, c\}$. Représenter chacun des langages suivants par une expression ne comportant que la concaténation, l'étoile et l'union :

1. L'ensemble des mots de A^* qui comptent au moins une fois la lettre a .
2. L'ensemble des mots de A^* qui ne commencent pas par la lettre a .
3. L'ensemble des mots de A^* qui contiennent la lettre a et la lettre b au moins une fois chacune, et tels que la première occurrence de la lettre a précède la première occurrence de la lettre b .
4. Les mots de longueur au moins n , où n est un entier naturel donné.

Exercice 2

On se donne deux langages L et L' sur un alphabet A , a et b deux lettres de A . Que peut-on dire des identités suivantes ? Si l'identité est fautive, peut-on la remplacer par une inclusion ? *Toute réponse sera pleinement justifiée.*

1. $aL + aL' = a(L + L')$
2. $\varepsilon L = L$
3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$
4. $(LL')^* = L^*L'^*$
5. $a^* + (aL)^* = (a + aL)^*$

Exercice 3

On considère la définition suivante :

Soit $u = a_1a_2 \dots a_n$ un mot sur un alphabet A ($0 \leq n$). Un *sous-mot* de u est un mot de la forme $v = a_{i_1}a_{i_2} \dots a_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, avec $0 \leq p$. (Le cas $p = 0$ implique que le mot vide ε est un sous-mot de n'importe quel mot u .)

1. Peut-on confondre la notion de sous-mot et celle de facteur ?
2. Remplacer cette définition un peu lourde par une élégante définition inductive.
3. Prouver (par induction) que si u est un sous-mot de v , alors $u = v$ ou $|u| < |v|$
4. Peut-on en déduire que la relation "être un sous-mot de" est bien-fondée sur A^* (on ne se fatiguera pas à montrer que c'est un ordre) ?

Exercice 4

Soit A un alphabet. On note \tilde{x} le miroir d'un mot de A^* .

Montrer par induction les égalités ci-dessous (x et y désignent des mots quelconques de A^*) :

1. $\widetilde{x.y} = \tilde{y}\tilde{x}$
2. $\tilde{\tilde{x}} = x$

On dit qu'un mot x de A^* est un **palindrome** si $x = \tilde{x}$.

On note P l'ensemble des palindromes de longueur paire de A^* .

3. Montrer que, pour tous mots x et y de A^* , $xy \in P \implies yx \in P^*$ (indication : on distinguera les cas $|x| \leq |y|$ et $|x| > |y|$).
4. Montrer que, pour tous mots x et y de A^* , $xy \in P$ et $x \in P \implies y \in P^*$ (indication : on commencera par démontrer la propriété dans le cas $|x| \leq |y|$, et on montrera que, si $|x| > |y|$, il existe un mot $x' \in P$, strictement plus court que x , tel que $x'y \in P$).

Exercice 5

On se donne un alphabet fini X .

1. Soit u un mot de X^* et a, b des lettres de X . On suppose $ua = bu$. Montrer (par récurrence sur la longueur de u) que nécessairement $a = b$, et qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u = a^p$.
2. Montrer que des mots $u, v \in X^*$ satisfont $uv = vu$ si et seulement si u et v sont puissances d'un même mot, c'est-à-dire qu'il existe $t \in X^*$ et $p, q \geq 0$ tels que $u = t^p$, $v = t^q$.
3. (**) Montrer que des mots $u, v \in X^*$ satisfont $u^p = v^q$ (où p, q sont des entiers positifs quelconques) si et seulement s'ils sont puissances d'un même mot. (Indication : si $u^p = v^q$ et $u = vt$, alors $(vt)^p = (tv)^p$ et donc $vt = tv$).

Exercice 6

On note C l'ensemble des chiffres de 0 à 9.

Soit r la fonction de \mathbb{N} dans C^* qui à un entier naturel associe sa représentation décimale, v la fonction de C^* dans \mathbb{N} qui à une suite de chiffres associe l'entier qu'elle représente.

1. Montrer que r n'est pas un homomorphisme du monoïde $(\mathbb{N}, +)$ dans le monoïde libre C^* .
Peut-on définir une structure de monoïde sur \mathbb{N} de façon que r soit un homomorphisme de ce monoïde dans le monoïde libre C^* ?
2. Montrer que v n'est pas un homomorphisme du monoïde libre C^* dans le monoïde $(\mathbb{N}, +)$.
Peut-on définir une structure de monoïde sur $C^* - \{\varepsilon\}$ de façon que v soit un homomorphisme de ce monoïde dans le monoïde $(\mathbb{N}, +)$?

Exercice 7

Soit M l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers positifs ou nuls, de déterminant 1.

1. Montrer que M , muni de la multiplication de matrices, est un monoïde.
2. Montrer que l'homomorphisme de monoïdes $f : \{a, b\}^* \rightarrow M$ défini par

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme.