

Automates et langages rationnels

Exercice 1

Construire, à l'aide de l'expression rationnelle donnée du langage, un automate déterministe qui le reconnaît : *On pourra — si cela s'avère utile — commencer par donner un NFA puis appliquer l'algorithme de détermination*

1. $A^m + \dots + A^n$ ($m \leq n, A$ fini)
2. $A^* \cdot c \cdot A^* \cdot a \cdot A^* \cdot b \cdot A^*$
3. $ba + (a + bb)a^*b$
4. $(bb + a)^*(aa + b)^*$
5. $(aa)^* + (aaa)^*$
6. $(aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$
7. les mots qui possèdent un facteur aua où u est un mot de longueur paire.

Exercice 2

Soit L un langage reconnaissable. Démontrer que l'ensemble des miroirs des mots de L est un langage reconnaissable.

Exercice 3

Montrer que le langage $\{a^n b^{2n} c^{3n} : n \geq 0\}$ n'est pas reconnaissable.

Exercice 4

On considère ici les expressions arithmétiques qu'on peut construire à l'aide des lettres x, y, z et des symboles arithmétiques $+, -, *, /$.

1. Donner un automate reconnaissant l'ensemble des expressions arithmétiques correctes sans parenthèse. Par exemple, $x + y * z - x$ est une expression correcte sans parenthèse.
2. On désigne par A_1 l'ensemble des expressions arithmétiques correctes contenant au plus un niveau de parenthèses. Par exemple, $x + y * z - x$, $x * (y - z) * y + x$ et $x * (y - z) * (y + x)$ sont des expressions arithmétiques correctes avec au plus un niveau de parenthèses. Donner un automate reconnaissant le langage A_1 .
3. De même on définit A_2 . Par exemple, les expressions $x + y * z - x$, $x * (y - z) * y + x$ et $x * ((y - z) * y + x)$ sont des expressions de A_2 . Donner un automate reconnaissant A_2 .
4. De même pour A_n , n quelconque.

Un théorème (qu'on verra plus tard) permet de montrer que l'ensemble des expressions arithmétiques correctes avec un niveau quelconque de parenthèses n'est pas reconnaissable. Où est l'erreur ? Y en a-t-il une, d'ailleurs ?

Exercice 5

Soit A un alphabet fini, $L \subset A^*$ un langage reconnu par un automate \mathcal{A} (que l'on pourra supposer déterministe).

Construire des automates reconnaissant les langages suivants :

1. $FIN(L) = \{w \in A^* \mid \exists x \in A^*, xw \in L\}$

2. $MIN(L)$, ensemble des mots de L dont aucun préfixe propre n'est dans L
3. x étant un mot fixé de A^* , $L_x = \{w \in A^* \mid xw \in L\}$
4. $L_{\frac{1}{2}} = \{x \in A^* \mid \exists y \in A^* \mid |x| = |y| \text{ et } xy \in L\}$
5. $L_2 = \{x \in A^* \mid xx \in L\}$

Exercice 6

Trouver des expressions rationnelles associées aux langages suivants :

1. les commentaires **C**
2. l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et un nombre impair de b .

Exercice 7

Soit $A = \{a, b, c\}$.

1. Trouver une expression rationnelle pour $A^* - \{a\}$.
2. Trouver une expression rationnelle pour $A^* - \{ab, abcb, bab\}$.

Exercice 8

Donner les automates déterministes minimaux qui reconnaissent les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$:

1. les mots qui débutent par a ;
2. les mots ne débutant pas par b ;
3. les mots qui contiennent le mot ab comme sous-mot (c'est-à-dire qui peuvent s'écrire $xaybz$ avec $x, y, z \in \{a, b\}^*$).

Exercice 9

Que pensez-vous du raisonnement ci-dessous ? Choisissez l'une des réponses suivantes :

- Je ne sais pas, mais vu la forme de la question, je pense que c'est faux.
- Il y a une erreur, et je le montre.
 1. Le langage $L_1 = a^* \cdot b^*$ est rationnel.
 2. Le langage $L_2 = \{a^n \cdot b^p \mid n + p \text{ est pair}\}$ est inclus dans L_1 .
 3. Or tout sous-ensemble d'un langage rationnel est rationnel.
 4. L_2 est donc rationnel.

Exercice 10

Soit $L = \{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$.

- Montrer que L n'est pas rationnel.
- Montrer que tout mot de L de longueur supérieure ou égale à 2 peut s'écrire xvy , avec $|v| > 0$ et $xv^*y \subset L$.

Que peut-on déduire de ces résultats ?

Exercice 11

Parmi les langages suivants, lesquels sont rationnels ?

1. $\{a^m b^n a^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$
2. les mots sur $\{a, b\}$ qui n'ont pas trois a consécutifs
3. $\{a^p \mid p \text{ est premier}\}$
4. les mots équilibrés sur $\{a, b\}$ (c'est-à-dire dont tout préfixe u vérifie $\left| |u|_a - |u|_b \right| \leq 1$)
5. l'ensemble des palindromes de $\{a, b\}^*$ (un palindrome est un mot identique à son miroir)