

Induction

Exercice 1

Montrer que la fonction récursive d'Ackermann

```
A(m,n) = if m=0 then n+1
          else if n=0 then A(m-1,1)
          else A(m-1,A(m,n-1))
```

est totale (partout définie) sur \mathbb{N}^2 .

Exercice 2

On utilise, pour manipuler des listes d'entiers, les fonctions prédéfinies suivantes :

1. `empty(L)` renvoie VRAI si `L` est la liste vide et FAUX sinon
2. si `L` n'est pas la liste vide, `head(L)` renvoie son premier élément et `tail(L)` la liste `L` privée de son premier élément
3. `cons(n,L)` renvoie la liste dont la tête est l'entier `n` et la queue est la liste `L`.

Par exemple si `L` est la liste `(1, 2, 3, 4)`, alors `head(L)` est l'entier `1`, `tail(L)` est la liste `(2, 3, 4)` et `cons(0,L)` la liste `(0, 1, 2, 3, 4)`.

On considère la fonction suivante :

```
merge(L1, L2) = if empty(L1) then L2
                 else if empty(L2) then L1
                 else if head(L1) <= head(L2)
                     then cons(head(L1), merge (tail(L1), L2))
                     else cons(head(L2),merge(L1,tail(L2)))
```

Montrer que cette fonction est totale sur les listes d'entiers, et que si `L1` et `L2` sont triées par ordre croissant, il en est de même de `merge(L1,L2)`.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par des entiers. On notera $\mathbf{b}(t_1, t_2)$ l'arbre dont le fils gauche est t_1 et le fils droit t_2 . L'arbre réduit à une feuille i sera noté $\mathbf{f}(i)$.

On considère l'algorithme suivant, portant sur deux arbres binaires t et t' :

- Si t et t' sont deux feuilles, on termine avec succès si les feuilles sont étiquetées par le même nombre, avec échec sinon
- Si l'un seulement des deux arbres est une feuille, on arrête sur échec
- si l'un des deux arbres est de la forme $\mathbf{b}(\mathbf{b}(t_1, t_2), t_3)$ on le remplace par $\mathbf{b}(t_1, \mathbf{b}(t_2, t_3))$ et on continue
- si le fils gauche de t et celui de t' sont des feuilles :
 - on arrête sur échec si les étiquettes des deux feuilles sont différentes
 - dans le cas contraire, on remplace chacun des deux arbres par son fils droit, on continue ...

Montrer que cet algorithme — destiné à vérifier si les deux arbres ont le même feuillage — termine toujours.