

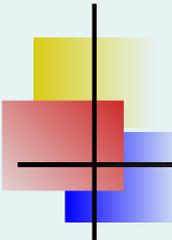
# MASTER - Année 1

## *Image et Son : Partie 2*

Pierre Hanna

hanna@labri.fr





# Processus aléatoire

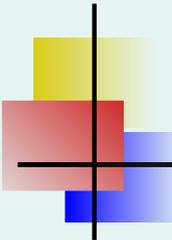
---

Un processus aléatoire  $X[n, \Omega]$  (ou signal aléatoire discret) est une fonction à deux dimensions.

- le temps,
- la réalisation (notée  $\Omega$ ).

$\mathcal{E}(X)$  : l'espérance mathématique du processus aléatoire.





# Processus aléatoire

---

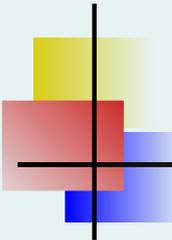
Si  $n$  constant, le processus aléatoire  $X$  est une variable aléatoire caractérisée par une loi de probabilité.

$\implies$  domaine **statistique**  $\implies \mathcal{E}(X) = \langle X \rangle$ .

Si  $\Omega$  est constant, le processus aléatoire est une fonction temporelle.

$\implies$  domaine **temporel**  $\implies \mathcal{E}(X) = \bar{X}$ .





# Stationnarité

---

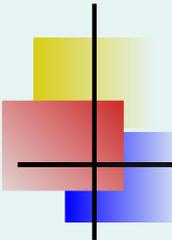
Un processus aléatoire est stationnaire ssi ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'intervalle de temps

Avec  $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  et  $X(t) = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ , l'hypothèse de stationnarité peut s'écrire:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t, m_k(t) = m_k$$

Application: étude d'un signal sur une durée limitée...





# Ergodicité

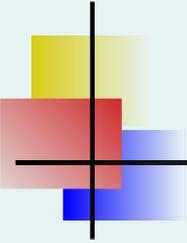
---

Un processus aléatoire est dit **ergodique** si les résultats des études de son évolution au cours du temps sont les mêmes que les résultats des études sur les réalisations successives.

$$\mathcal{E}(X) = \langle X \rangle = \bar{X}$$

Application: Étude d'un signal sur le temps au lieu de différentes réalisations





# Autocorrélation

---

L'étude des périodicités d'un signal peut s'effectuer à partir de l'observation des **similitudes** du signal avec ce même signal décalé temporellement.

⇒ fonction d'autocorrélation, notée  $\Gamma$

- Cas fini:

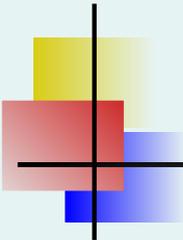
$$\forall \tau, \quad \Gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

- Cas infini:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t + \tau)dt$$

Le temps de décalage est noté  $\tau$ .





# Autocorrélation

---

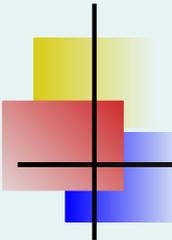
Définition statistique

$$\Gamma(\tau) = \mathcal{E}[X(t)X(t + \tau)]$$

La valeur de la fonction d'autocorrélation en 0 est la **variance** du signal aléatoire, ou la puissance moyenne.

$$\Gamma(0) = \mathcal{E}[X^2(t)] = \sigma^2 = V(X)$$





## Autocorrélation: application et limites

---

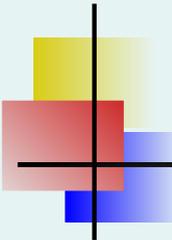
Fonction d'autocorrélation est en général appliquée à des signaux discrets de longueur finie  $N$  échantillons.

L'algorithme de calcul:

$$\forall \tau \in [0; N - k], \Gamma(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^k x[i]x[i + \tau]$$

Les choix de  $N$  et  $k$  sont **prépondérants** : la périodicité recherchée doit notamment être inférieure à la durée correspondant au nombre d'échantillons  $N - k$ .





## Autocorrélation: propriétés

---

- La fonction d'autocorrélation est une fonction paire:

$$\forall \tau, \quad \Gamma(\tau) = \Gamma(-\tau)$$

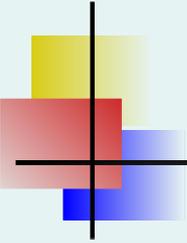
- Valeur maximale lorsque le retard est nul ( $\tau = 0$ ):

$$\forall \tau, \quad \Gamma(0) \geq |\Gamma(\tau)|$$

- Dans le cas de signaux non infinis, qui exclut le cas de signaux périodiques, la fonction d'autocorrélation converge vers 0 à l'infini:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |\Gamma(\tau)| = 0$$





## Autocorrélation: cas d'une sinusoïde

$$\forall t, \quad x(t) = a_0 \sin(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

$$\forall \tau, \quad \Gamma_x(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \sin(2\pi f_0(t + \tau) + \phi_0) dt$$

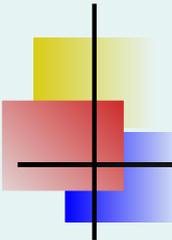
$$\text{Or } \sin(2\pi f_0(t + \tau) + \phi_0) = \sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) \sin(2\pi f_0 \tau)$$

$$\begin{aligned} \forall \tau, \quad \Gamma_x(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi_0) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &\quad + \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) \sin(2\pi f_0 t + \phi_0) \sin(2\pi f_0 \tau) dt \\ \Gamma_x(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi_0) \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t + \phi_0) \sin(2\pi f_0 \tau) dt \end{aligned}$$

Les intégrales de sinus sont nulles (fréquence non nulle) et les intégrales de sinus au carré valent  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \forall \tau, \quad \Gamma_x(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \sin^2(2\pi f_0 t + \phi_0) \cos(2\pi f_0 \tau) dt \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{a_0^2}{4T_0} 2T_0 \cos(2\pi f_0 \tau) \\ &= \frac{a_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$





## Densité spectrale de puissance

---

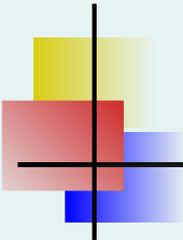
La **densité spectrale de puissance** (*power spectrum*)  $S_x$  d'un signal aléatoire  $x$  est définie par la transformée discrète de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $\Gamma(\tau)$ .

⇒ contenu fréquentiel **moyen** d'un signal aléatoire:

$$S_x = \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) \exp^{-j2\pi f\tau}$$

La densité spectrale de puissance décrit la **distribution de l'énergie** du signal selon les différentes valeurs de fréquences.





## *Théorème de Wiener-Khintchine*

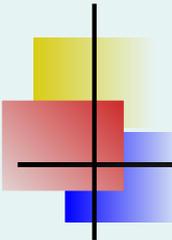
---

Soit  $X(k)$  la transformée de Fourier du signal  $x(n)$  et  $A(k)$  celle de son autocorrélation  $\Gamma(\tau)$ .

Le théorème de Wiener-Khintchine s'écrit:

$$\forall k, \quad A(k) = |X(k)|^2$$





# Moments

---

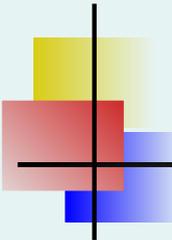
Un signal aléatoire est caractérisé par la connaissance de ses moments statistiques et/ou temporels. Souvent, la connaissance des premiers moments suffit.

Les moments d'ordre  $k$ , notés  $m_k$ , et les moments centrés associés, notés  $\sigma_k$ , sont définis par la relation:

$$m_k = \mathcal{E}(X^k)$$

$$\sigma_k = \mathcal{E}(X - m_k)^k$$





## Moments d'ordre 1 et 2

---

- Moment d'ordre 1 et moyenne

$$m_1 = \mathcal{E}(X)$$

En pratique, les signaux ont tendance à avoir une moyenne **nulle**.

- Moment d'ordre 2

$$m_2 = \mathcal{E}(X^2)$$

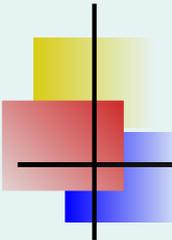
aussi appelé la variance  $V$

⇒ dispersion des valeurs du signal autour de la moyenne

L'écart-type, noté  $\sigma$ , est défini comme:

$$\sigma_X = \sqrt{m_2} = \sqrt{V(X)}$$





## Moments d'ordre 3

---

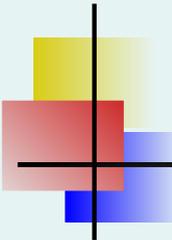
Une grandeur appelée **skewness** et notée  $S_X$  est définie à partir du moment d'ordre 3:

$$S_X = \frac{\mathcal{E}(X^3)}{\sigma^3}$$

⇒ caractérise la **symétrie** de la densité de probabilité.

- densité de probabilité symétrique  $\iff$  un skewness nul
- Plus la densité de probabilité est asymétrique, plus le skewness a une grande valeur.





## Moments d'ordre 4

---

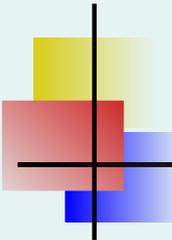
Une grandeur appelée kurtosis et notée  $K_X$  est définie à partir du moment d'ordre 4:

$$K_X = \frac{\mathcal{E}(X^4)}{\sigma^4}$$

⇒ caractérise la **forme** de la densité de probabilité.

- Plus le kurtosis est important, plus la densité de probabilité est *pointue*.
- un kurtosis faible signifie que la densité de probabilité est plate.





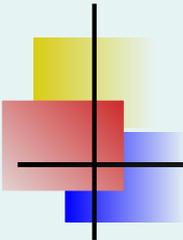
## *Kurtosis/Skewness : exemples*

---

Loi de Distribution	skewness	kurtosis
Uniforme	0	1.8
Gaussienne	0	3.0
Rayleigh	0.631	3.245

Valeurs de skewness et kurtosis pour quelques distributions classiques.





# Corrélation

---

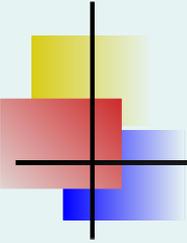
Le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est défini par:

$$\rho = \frac{\mathcal{E}(XY) - \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)}{\sqrt{\mathcal{E}(X^2)\mathcal{E}(Y^2)}}$$

Si les deux variables sont indépendantes, ce coefficient est nul, car

$$\mathcal{E}(XY) = \mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y)$$





# Intercorrélation

---

La fonction d'intercorrélation est donnée par:

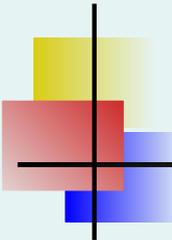
$$\Gamma(\tau) = \mathcal{E}[X(t)Y(t + \tau)]$$

Cette fonction présente les propriétés suivantes:

- Si les deux signaux sont indépendants, cette fonction est nulle (la réciproque n'est pas toujours vraie);
- La fonction d'intercorrélation de deux sinusoïdes de fréquences différentes est nulle;
- La fonction d'intercorrélation d'un signal périodique et d'un bruit aléatoire est nulle;

Application : détection de sinusoïdes dans du bruit





## Densité de probabilité

---

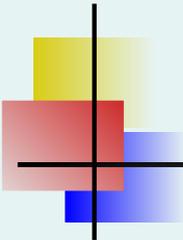
La fonction de densité de probabilité (PDF) d'une variable aléatoire  $X$ , notée  $\rho_X$  est la probabilité associée à chaque valeur possible de la variable.

La probabilité d'obtenir une valeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est  $\rho(x)dx$ .

Cette fonction est normalisée:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x) dx = 1$$





# Estimations

---

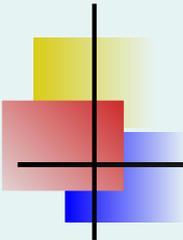
Estimation de pdf  $\implies$  **Histogramme**

Estimation de moments:

$$\mathcal{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_X(x)dx$$

$$\mathcal{E}(X) = \sum_0^N x[n]\rho_X(x[n])$$





## Somme de PDFs

---

Variable aléatoire  $Z$  : la somme de deux variables aléatoires indépendantes  $X$  et  $Y$

$\rho_Z(x_0)$  : la somme fasse  $x_0$ .

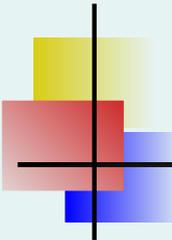
- Si la variable aléatoire  $X$  prend la valeur  $x'$  (probabilité  $\rho_X(x')$ ), la variable aléatoire  $Y$  doit donc prendre la valeur  $(x_0 - x')$  (probabilité  $\rho_Y(x_0 - x')$ ).

$$\rho_{X+Y}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x') \rho_Y(x_0 - x') dx'$$

Cette relation est en fait la **convolution** des deux PDFs:

$$\rho_{X+Y}(x_0) = \rho_X(x_0) * \rho_Y(x_0)$$





## Loi uniforme

---

La loi de distribution uniforme : probabilité constante sur l'intervalle des valeurs possibles, noté  $[a; b]$ :

$$\forall x \in [a; b], \quad \rho(x) = \frac{1}{b - a}$$

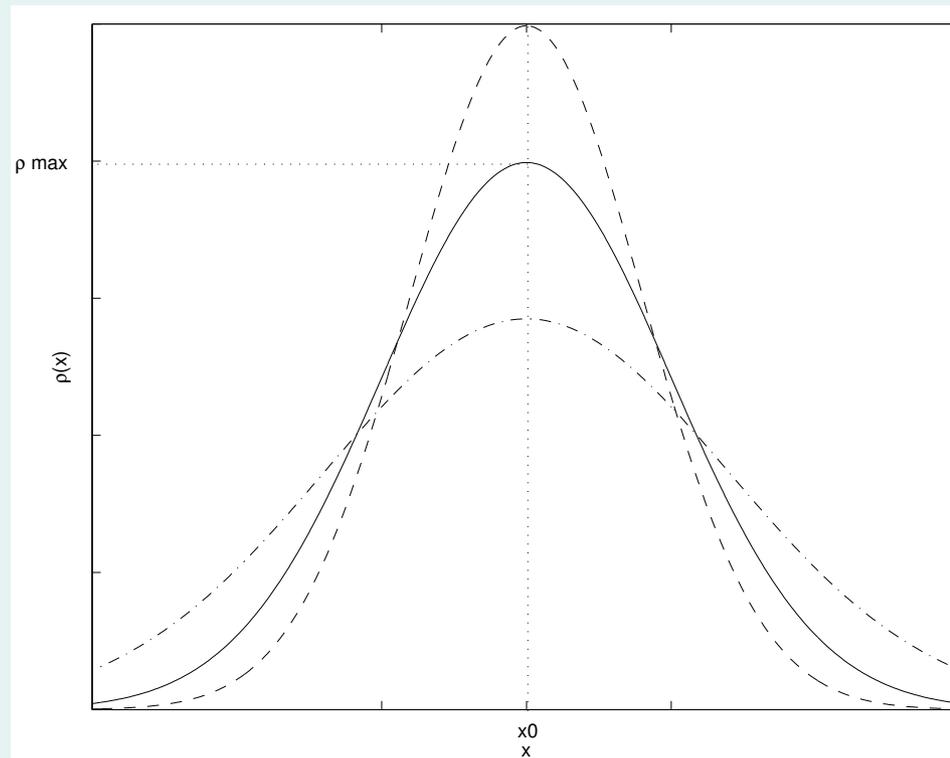
Algorithme: en C, la fonction `rand`

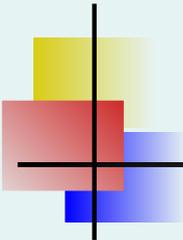


# Loi de Gauss

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{(2\sigma^2)}\right]$$

- $x_0$  représente la valeur moyenne
- $\sigma$  représente l'écart-type.





## Théorème central limite

---

La somme à l'infini de variables aléatoires indépendantes, de même loi, moyenne et variance (finie), est une variable aléatoire qui suit une loi de Gauss.

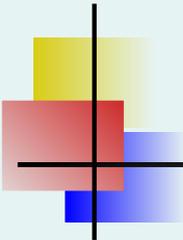
Si  $X_n$  sont des variables aléatoires de variance  $\sigma$ , de moyenne  $x_0$ , et:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - Nx_0}{\sigma\sqrt{N}}$$

alors  $\lim_{N \rightarrow \infty} Y_n$  suit une loi de Gauss.

Phénomènes aléatoires naturels à tendance gaussienne...





## Loi de Gauss : algorithme

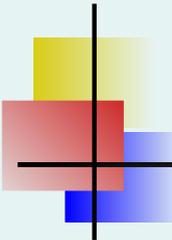
---

repose sur le théorème central limite:

⇒ addition d'un grand nombre de valeurs uniformément distribuées (notées  $x^u$ ): le nombre total obtenu, noté  $X_i^g$  suit une loi de Gauss:

$$X^g = \sum_{j=1}^N x_j^u$$





# SNR

---

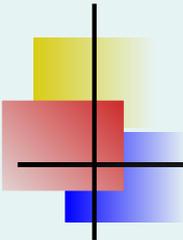
Le **rapport signal sur bruit** (SNR pour *Signal-to-Noise Ratio*) est défini par le rapport entre l'énergie du signal  $s$  sur l'énergie du bruit  $b$ :

$$\text{SNR} = \frac{E_s}{E_b}$$

Le SNR est souvent représenté sur une échelle logarithmique:

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(\text{SNR})$$





# Signaux aléatoires : bruit

---

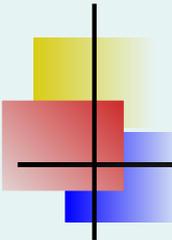
En signal, le bruit est un signal perturbant assimilé à un signal aléatoire.

En pratique : bruit toujours présent

Différents types de bruit:

- Bruit thermique
- Bruit blanc
- Bruit coloré
  - Bruit rose
  - Bruit brownien
  - ...





## *Bruits thermiques*

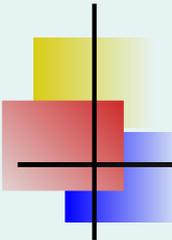
---

Introduite en électronique au début du 20ème siècle par Johnson et Nyquist.

Le bruit : mouvements désordonnés (aléatoires) des porteurs de charges (électrons) d'un matériau sous l'influence de la température (non nulle sur l'échelle Kelvin)  $\implies$  neige sur la télé

$\implies$  bruit de Johnson ou de Nyquist, ou encore bruit thermique





## Bruit blanc

---

Analogie avec la lumière blanche (présence de photons de toutes les valeurs d'énergie, et donc de toutes les couleurs)

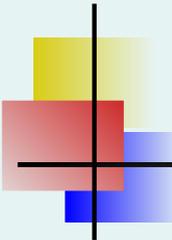
Spectre de fréquence continu et d'amplitude moyenne constante indépendante des fréquences:

$$\forall f, \quad \langle X(f) \rangle = X_0$$

Le bruit blanc reste un modèle théorique et un tel bruit ne peut pas exister naturellement car il aurait sinon une puissance infinie:

$$P = \int_0^{\infty} X^2(f) df$$





## Bruit blanc : propriétés

---

Bruit blanc  $B[n]$  est représenté par des échantillons de moyenne nulle, indépendants, mais qui suivent la même loi de distribution.

$$\forall n, \quad \mathcal{E}(B[n]) = 0$$

$$\forall n, \forall \tau \neq 0, \quad \Gamma(\tau) = \mathcal{E}(B[n]B[n + \tau]) = 0$$

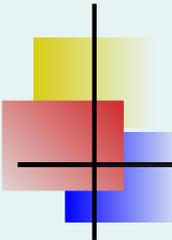
En calculant la fonction d'autocorrelation  $\Gamma$  pour  $\tau = 0$ :

$$\Gamma(\tau = 0) = \mathcal{E}[x^2(n)] = \sigma_x^2$$

La fonction d'autocorrelation d'un bruit blanc est décrite par:

$$\Gamma(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$$





## Bruit blanc : algorithme

---

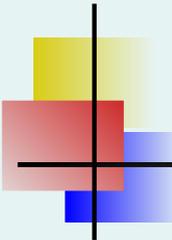
Distribution uniforme:

$$\forall (x_1, x_2) \in ]-1; 1]^2, p(x = x_1) = p(x = x_2)$$

La fonction de densité de probabilité  $\rho$  employée est donc définie par:

$$\forall x \in ]-1; 1], \quad \rho(x) = \frac{1}{2}$$





## Bruit blanc gaussien : algorithme

---

La somme de  $M = 12$  variables uniformes  $X_i$ , choisies entre 0 et 1, est suffisante pour avoir une bonne approximation:

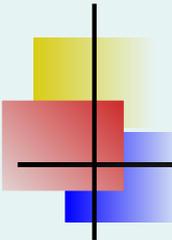
$$\forall m, \quad X_m = \sum_{i=1}^M X_m^i$$

$$\forall m, \quad \mathcal{E}(X_m) = \sum_{i=1}^M \mathcal{E}(X_m^i) = \frac{M}{2}$$

ainsi que la variance:

$$\forall m, \quad V(X_m) = \sum_{i=1}^M V(X_m^i) = \frac{M}{12}$$





# Bruit blanc gaussien : algorithme

---

$M$  variables aléatoires distribuées selon une loi de Gauss de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ :

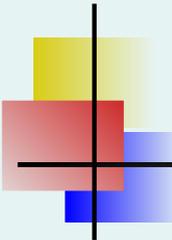
**Data** :  $N, M, m, \sigma$

**Result** : tableau samples de taille  $N$

**début**

```
    pour  $i = 0$  à  $N - 1$  faire
        sum = 0;
        pour  $j = 0$  à  $M - 1$  faire
            sum = sum + rand(0,1);
        fin
        samples[ $i$ ] =  $\sigma \cdot (\text{sum} - \frac{M}{2}) + m$ ;
    fin
fin
```





## Bruit rose

---

Les bruits peuvent être considérés comme rose (*pink noise*) si leur distribution de puissance moyenne (ou énergie sur une longue période de temps) suit une échelle logarithmique.

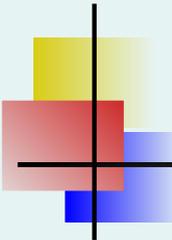
⇒ leur spectre d'amplitude soit proportionnel à l'inverse de la fréquence:

$$\forall f \geq f_{\min}, \quad S(f) = \frac{S_0}{f}$$

Ainsi, la puissance du bruit est aussi importante dans l'octave [200; 400]Hz que dans l'octave [2000 – 4000]Hz:

$$\forall f \geq f_{\min}, \quad \int_f^{2f} S(f) df = S_0 \ln \frac{2f}{f} = S_0 \ln(2)$$





## Bruit rose

---

Bruit rose : bruit en  $\frac{1}{f}$ .

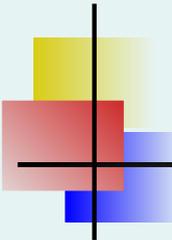
$$S(2f) = \frac{1}{2}S(f)$$

Spectre caractérisé par une baisse de  $-3\text{dB}$  par octave (à peu près  $-10\text{dB}$  par décade):

$$\forall f \geq f_{\min}, \quad 10 \log \frac{S(f)}{S(2f)} = -10 \log 2 = -3$$

Applications nombreuses : biologie, astronomie, géologie, ...





## Bruit rose : algorithme

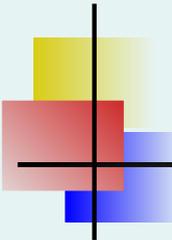
---

Principe:

- Chaque échantillon est la somme de  $n$  variables aléatoires.
- Pour avoir l'échantillon, on ne retire qu'un certain nombre de ces variables.

Comme les hautes fréquences sont atténuées, deux valeurs successives vont être proches: peu de variables retirées.





# Bruit rose : algorithme

---

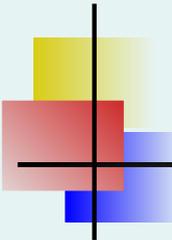
**Data** :  $M$

**Result** : tableau samples de taille  $2^M$

**début**

```
    pour  $i = 0$  à  $M - 1$  faire
        | oldbit[i] = 1;
    fin
    pour  $K = 0$  à  $2^M - 1$  faire
        | K = bit[0], bit[1], ..., bit[M-1];
        | sum = 0;
        | pour  $i = 0$  à  $M - 1$  faire
            | si  $bit[i] \neq oldbit[i]$  alors
                | d[i] = rand(0.1);
            fin
            | sum = sum + d[i];
            | oldbit[i] = bit[i];
        fin
        | samples[K] = sum;
    fin
fin
```



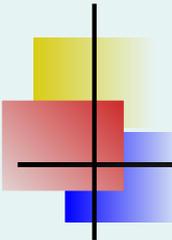


## *Bruit rose : algorithme*

---

indice $i$	0	1	2	3	4	5	6	7
bits	000	001	010	011	100	101	110	111
retirages	3	1	2	1	3	1	2	1





## Bruit brownien

---

Son nom vient des mouvements dits browniens des molécules dans un fluide. On parle aussi de marche aléatoire (*random walk*).

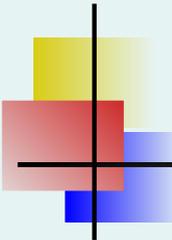
Les bruits dits browniens sont les bruits dont les spectres d'amplitude sont proportionnels à l'inverse de la fréquence au carré.  $\implies$  bruit en  $\frac{1}{f^2}$

Le spectre peut donc s'écrire sous la forme:

$$\forall f \geq f_{\min}, \quad S(f) = \frac{S_0}{f^2}$$

- $S(2f) = \frac{1}{4}S(f)$
- Spectre caractérisé par une baisse de 6dB par octave.





# Bruit brownien: algorithme

---

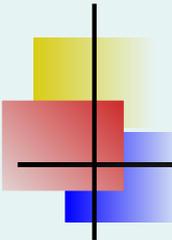
**Data** :  $N$

**Result** : tableau samples de taille  $N$

**début**

```
    sum = rand(-1,1);
    oldsum = sum;
    pour  $i = 0$  à  $N - 1$  faire
        sum = oldsum + rand(-0.1,0.1);
        tant que  $sum > 1.0$  OU  $sum < -1.0$  faire
            sum = oldsum + rand(-0.1,0.1);
        fin
        samples[ $i$ ] = sum;
        oldsum = sum;
    fin
fin
```





## *Estimation de la DSP*

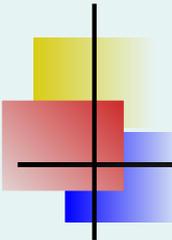
---

La densité spectrale de puissance obtenue par transformée de Fourier d'un signal aléatoire n'a pas forcément une grande signification.

Deux méthodes principales pour affiner l'estimation de la DSP:

- Lissage du spectre
- Moyenne de spectres à court-terme





## Filtrage et signaux aléatoires

---

Effet du filtrage (réponse impulsionnelle  $h$ ) sur un signal aléatoire  $x$ :

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

La densité spectrale de puissance  $S_y$  du signal obtenu  $y$  est donc:

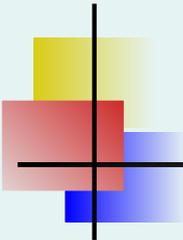
$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

où  $H(f)$  représente la réponse fréquentielle du filtre appliqué. Or  $S_x(f) = \sigma_x^2$ :

$$S_y(f) = |H(f)|^2 \sigma_x^2$$

Nous pouvons donc remarquer le signal obtenu après filtrage d'un bruit blanc, **n'est plus** un bruit blanc. La densité spectrale de puissance prend la forme de la réponse fréquentielle du filtre.





# Bilan TSN

---

- Echantillonnage
- Transformée fourier
- Analyse spectrale
- Convolution
- Transformée Z
- Filtres FIR, IIR
- Signaux aléatoires

