



MASTER - Année 1

Image et Son : Partie 2

Pierre Hanna

`pierre.hanna@labri.fr`



Produit de convolution

Le produit de convolution (opérateur noté $*$) de deux signaux discrets h et x est défini par:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Une autre forme de définition est la forme de la table de convolution, en remarquant que $k + (n - k) = n$:

$$y(n) = \sum_{i,j \text{ tq } i+j=n} h(i)x(j)$$

Convolution : taille

Signal h soit de taille $M + 1 : 0 \leq k \leq M$

Signal x est de taille $L : 0 \leq n - k \leq L - 1$

$$k \leq n \leq L - 1 + k$$

$$0 \leq k \leq n \leq L - 1 + k \leq L - 1 + M$$

$$0 \leq n \leq L - 1 + M$$

Le signal y est donc de taille $L + M$

\implies durée plus importante (M échantillons supplémentaires) que le signal x .

Convolution : taille

$$\begin{aligned}0 &\leq n - k \leq L - 1 \\ -(L - 1) &\leq k - n \leq 0 \\ n - (L - 1) &\leq k \leq n\end{aligned}$$

Il faut également que k vérifie:

$$0 \leq k \leq M$$

$$\implies \max(0, n - L + 1) \leq k \leq \min(n, M)$$

Le produit de convolution s'écrit donc:

$$y(n) = \sum_{k=\max(0, n-L+1)}^{\min(n, M)} h(k)x(n-k)$$

Convolution : exemple

Soit les deux signaux: $x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ et $h = [h_0 \ h_1 \ h_2 \ h_3]$

Le produit de convolution $y = h * x$ est de taille $L + M = 4 + 3 = 7$ échantillons:

$$y(n) = \sum_{k=\max(0,n-4)}^{\min(n,3)} h(k)x(n-k)$$

$$\max(0,0-4) \leq k \leq \min(0,3) \implies k = 0$$

$$\max(0,1-4) \leq k \leq \min(1,3) \implies k = 0,1$$

$$\max(0,2-4) \leq k \leq \min(2,3) \implies k = 0,1,2$$

$$\max(0,3-4) \leq k \leq \min(3,3) \implies k = 0,1,2,3$$

$$\max(0,4-4) \leq k \leq \min(4,3) \implies k = 0,1,2,3$$

$$\max(0,5-4) \leq k \leq \min(5,3) \implies k = 1,2,3$$

$$\max(0,6-4) \leq k \leq \min(6,3) \implies k = 2,3$$

$$\max(0,7-4) \leq k \leq \min(7,3) \implies k = 3$$

Convolution : exemple

Par exemple, pour $n=5$, le signal résultant y_5 vaut:

$$y_5 = \sum_{k=1,2,3} h(k)x(5-k) = h_1x_4 + h_2x_3 + h_3x_2$$

Les calculs successifs sont donc dans ce cas:

$$y_0 = h_0x_0$$

$$y_1 = h_0x_1 + h_1x_0$$

$$y_2 = h_0x_2 + h_1x_1 + h_2x_0$$

$$y_3 = h_0x_3 + h_1x_2 + h_2x_1 + h_3x_0$$

$$y_4 = h_0x_4 + h_1x_3 + h_2x_2 + h_3x_1$$

$$y_5 = h_1x_4 + h_2x_3 + h_3x_2$$

$$y_6 = h_2x_4 + h_3x_3$$

$$y_7 = h_3x_4$$

Convolution : table

Pour effectuer des calculs *à la main*, il est préférable de passer par une notation à base de tables:

x_i

h_j

h_0x_0	h_0x_1	h_0x_2	h_0x_3	h_0x_4
h_1x_0	h_1x_1	h_1x_2	h_1x_3	h_1x_4
h_2x_0	h_2x_1	h_2x_2	h_2x_3	h_2x_4
h_3x_0	h_3x_1	h_3x_2	h_3x_3	h_3x_4

Convolution : propriétés

- $x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)x(n-k)$$

- $x(n) * (y(n) + z(n)) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$

- $x(n) * \delta(n) = x(n)$

Convolution : propriétés

La transformée en z d'un produit de convolution de deux signaux quelconques x et y , est le produit des transformées X et Y en z des deux signaux:

$$\begin{aligned}x(n) * y(n) &\xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right] z^{-n} \\&\xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i)y(i) \right] z^{-n} \\&\xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(i) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i)z^{-n} \\&\xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(i) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i)z^{-(n-i)}z^{-i} \\&\xrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(i)z^{-i} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-i)z^{-(n-i)} \\&\xrightarrow{Z} Y(z)X(z)\end{aligned}$$

\implies Lien avec la transformée de Fourier

Convolution : algorithme classique de calcul

version *naïve* de l'algorithme de calcul d'un produit de convolution de deux signaux h et x :

```
for (n = 0; n < L+M; n++)  
    for (y[n] = 0, m = max(0, n-L+1); m <= min(n, M); m++)  
        y[n] += h[m] * x[n-m];
```

Complexité en (L^2)

Convolution par blocs

Un des 2 signaux est de taille importante

⇒ calcul du produit de convolution par **blocs successifs**

L échantillons = taille de ces blocs: $x = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots]$

Le signal de sortie est donc obtenu sous la forme de blocs successifs

$y = [y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots]$, avec:

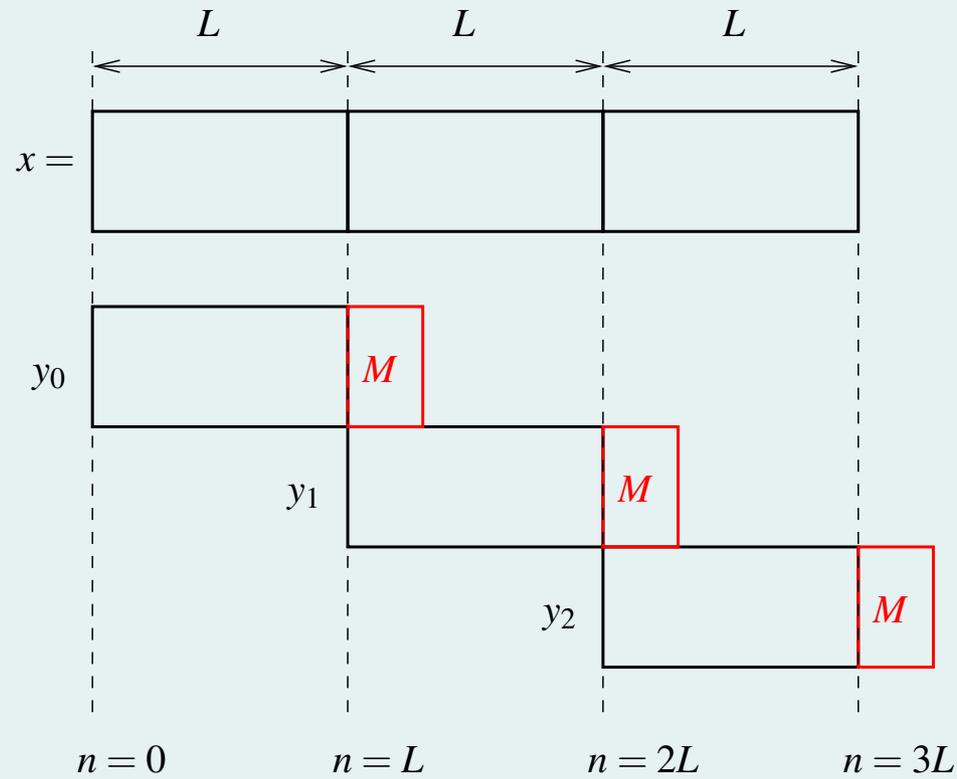
$$y_0 = h * x_0$$

$$y_1 = h * x_1$$

$$y_2 = h * x_2$$

...

Convolution par blocs



Méthode **overlap-add**

Convolution par blocs: algorithme

Sauvegarde de certains échantillons:

...

```
/* calcul de la convolution sur un bloc */
```

```
conv(M, h, L, x, y);
```

```
for (i=0; i<M; i++) {
```

```
    /* overlap/add */
```

```
    y[i] += ytemp[i];
```

```
    /* sauvegarde des M derniers échantillons */
```

```
    ytemp[i] = y[i+L];
```

```
}
```

Convolution : algorithme FFT

Algorithme rapide de calcul de produit de convolution:

$$y = \text{IFFT}(\text{FFT}(h) \cdot \text{FFT}(x))$$

Les deux signaux doivent être de même taille N .

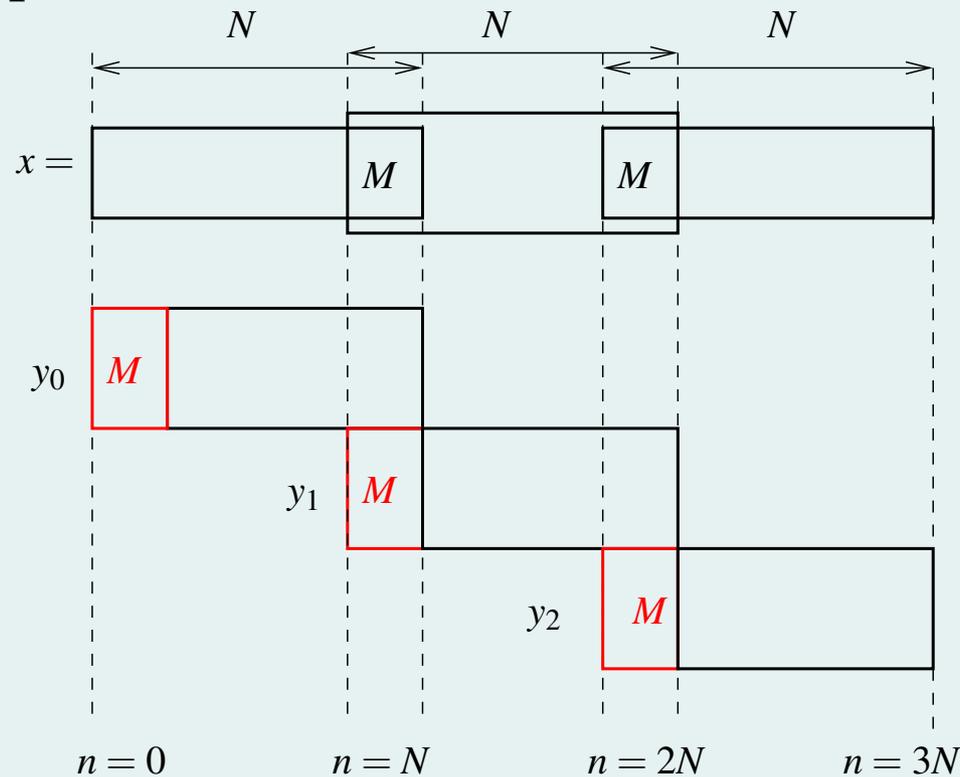
La complexité de cet algorithme est donc en $O(N \log_2(N))$.

Convolution par blocs: algorithme FFT

Blocs de taille $N \implies$ bloc résultant de taille $N + M$

Ici, les M premiers points ne sont pas corrects : calculés dans le bloc précédent

Algorithme **overlap-save**:



Transformée en Z

Étant donné un signal numérique $x(n)$, la transformée en z est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, z \in \mathbb{Z}$$

ou, en écrivant termes à termes:

$$X(z) = \dots + x(-2)z^2 + x(-1)z^1 + x(0)z^0 + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

Exemple: $x = [2 \ 3 \ 5 \ 2]$ et $y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1]$

\implies transformée en z : $2 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^{-3}$ et $1 - z^{-4}$.

Causal/Anti-causal

La transformée en z est décrite par un nombre de termes égal au nombre d'échantillons non nuls du signal x .

- signal **causal**: défini pour des valeurs n positives ou nulles
⇒ puissances négatives de z
- Signal strictement **anticausal**: défini que pour des valeurs n négatives
⇒ puissances positives de z

Transformée Z : propriétés

- Linéarité :

$$a_1x_1(z) + a_2x_2(z) \xrightarrow{Z} a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

- Retard :

$$x(n - D) \xrightarrow{Z} z^{-D}X(z)$$

- Convolution :

$$y(n) = h(n) * x(n) \implies Y(z) = H(z)X(z)$$

Région de Convergence

Si le signal x est de durée infinie \implies , sa transformée en z est une somme infinie

Il est possible que certaines valeurs de la variable complexe z rende la transformée en z **divergente**.

La **région de convergence** (ROC) : sous-ensemble de \mathbb{C} pour lequel la série converge:

$$\text{ROC} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}| \neq \infty \right\}$$

\implies **stabilité** (filtres)

Signal unitaire

Le signal unitaire (ou suite unitaire) est définie par:

$$u(n) = 0 \quad \text{si } n < 0$$

$$u(n) = 1 \quad \text{si } n \geq 0$$

Tout signal peut se décomposer en une somme de signaux unitaires:

$$x(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m)u(n - m)$$

Exemple

Soit le signal causal suivant:

$$x(n) = (0.5)^n \cdot u(n) = \{1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, \dots\}$$

où u est donc le signal unitaire, et donc $n \geq 0$

La transformée en z du signal x :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5z^{-1})^n$$

Exemple

Cette somme infinie = somme des éléments d'une série géométrique:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

à la condition que $|x| < 1$.

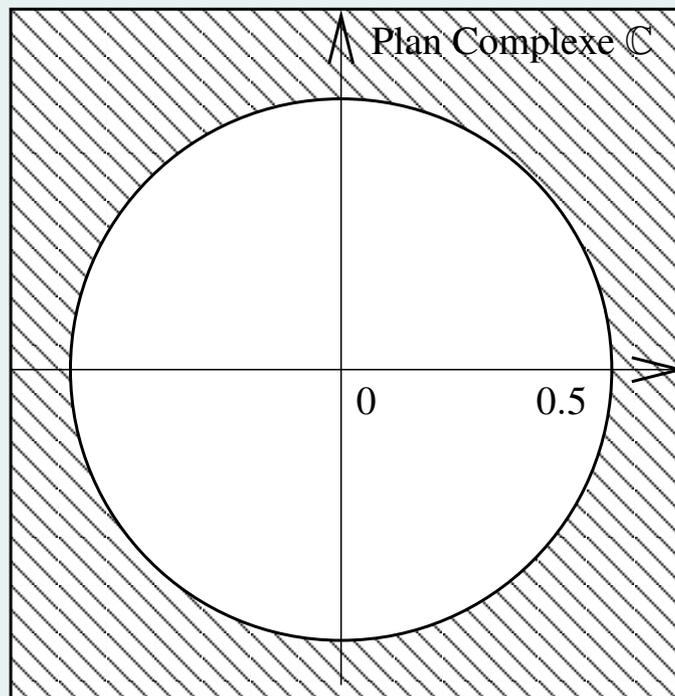
La transformée en z devient

$$X(z) = \frac{1}{1 - (0.5z^{-1})} = \frac{z}{z - 0.5}$$

si la condition $|z| > 0.5$ est vérifiée.

Exemple

Cette condition $|z| > 0.5$ est représentée par la figure ci-dessous:



Pôle : $z = 0.5$.

Exemple 2

Considérons le signal anti-causal suivant:

$$y(n) = -(0.5)^n \cdot u(-n - 1)$$

avec $-n - 1 \geq 0$, c'est-à-dire $n \leq -1$.

La transformée en z de y est:

$$Y(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} ((0.5)^{-1} z)^{-n} = - \sum_{m=1}^{\infty} ((0.5)^{-1} z)^m$$

Exemple 2

En appliquant la formule de la somme des éléments d'une série géométrique, on peut écrire:

$$y + y^2 + y^3 + y^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{y}{1-y}$$

à la condition que $|y| < 1$.

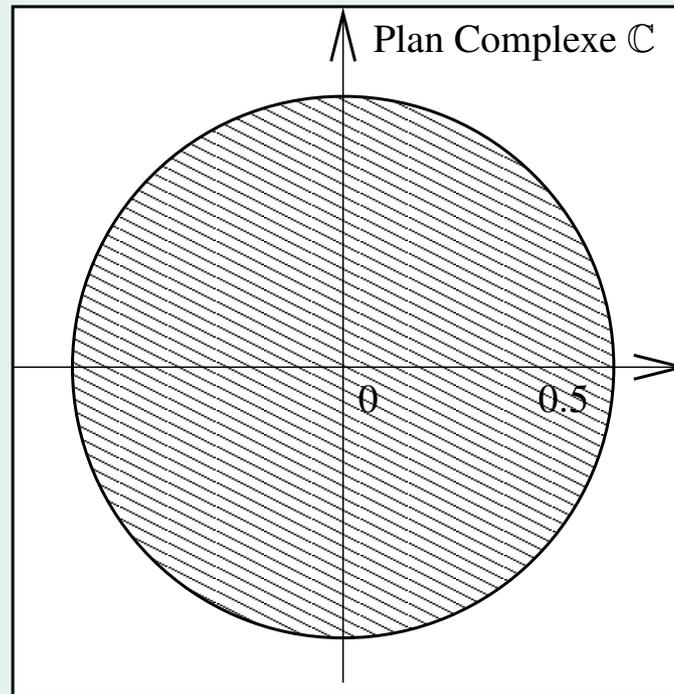
Il vient donc en appliquant cette formule:

$$Y(z) = - \sum_{m=1}^{\infty} ((0.5)^{-1}z)^m = - \sum_{m=1}^{\infty} x^m = - \frac{(0.5)^{-1}z}{1 - (0.5)^{-1}z} = \frac{1}{1 - (0.5z^{-1})} = \frac{z}{z - 0.5}$$

à la condition que $|x| = |0.5z^{-1}| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 0.5$.

Exemple 2

La région de convergence:



Exemple: conclusion

Les deux signaux x et y ont donc la même transformée en z
mais deux régions de convergence **différentes**.

$$a^n u(n) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{pour } |z| > |a|$$

$$-a^n u(-n-1) \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{pour } |z| < |a|$$

On considère le signal causal

$$x(n) = A_1 p_1^n u(n) + A_2 p_2^n u(n) + \dots$$

dont la transformée en z est

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

aux conditions

$$|z| > |p_1|, |z| > |p_2|, \dots$$

ce qui revient à la condition unique

$$|z| > \max_i |p_i|$$

Stabilité

La **stabilité** est caractérisée dans le domaine z par rapport à la région de convergence.

signal stable : signal borné en amplitude et/ou en temps

Condition nécessaire et suffisante: région de convergence contient le **cercle unité**

signal ou système **causal et stable**: **tous** les pôles de la transformée en z **inclus strictement** dans le cercle unité.

Ainsi, la condition précédente devient pour un signal stable:

$$1 > \max_i |p_i|$$

Tous les pôles complexes doivent donc avoir une norme inférieure à 1.

Anti-causalité

Dans le cas d'un signal **anti-causal**, la condition devient:

$$1 < \min_i |p_i|$$

ce qui signifie que tous les pôles ont une norme supérieure à 1.

Anti-causalité

Les différents cas possibles à partir du signal x :

- Cas **causal** et **stable**:

$$x(n) = [A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + A_3 p_3^n] u(n)$$

- Cas **anti-causal** et **stable**:

$$x(n) = -[A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + A_3 p_3^n] u(-n - 1)$$

- Cas **mixte** ($|p_1| < |p_2| < 1$ et $p_3 > 1$) et **stable**:

$$x(n) = [A_1 p_1^n + A_2 p_2^n] u(n) - [A_3 p_3^n] u(-n - 1)$$

Transformée en Z et DFT

La transformée discrète de Fourier (DFT), définie par:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j \frac{2\pi f n}{F_e}}$$

peut être appréhendée comme l'évaluation de la transformée en z sur le cercle unité. En effet, si on pose

$$z = \exp^{2\pi j \frac{f}{F_e}}$$

il vient alors

$$X(z) \Big|_{z=\exp 2\pi j \frac{f}{F_e}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j \frac{2\pi f n}{F_e}} = X(f)$$

Transformée inverse en Z

Trouver un signal x dont la transformée en z est $X(z)$

Réponse pas toujours unique: plusieurs signaux peuvent avoir la même transformée en z : \implies choix de la région de convergence

En pratique: forme du type somme de fractions:

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots$$

\implies les pôles p_1, p_2, \dots .

- Définition des régions de convergence
- Stabilité : une seule région

Transformée inverse en Z

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

où

$$D(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_m z^{-1})$$

Condition : degré du numérateur $N <$ degré du dénominateur D

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - p_2 z^{-1})} + \cdots + \frac{A_m}{(1 - p_m z^{-1})}$$

Transformée inverse en Z: exemple

$$X(z) = \frac{2 - 2.05z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 1.25z^{-1})}$$

On peut décomposer X sous la forme:

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - 0.8z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - 1.25z^{-1})}$$

avec

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 1$$

Transformée inverse en Z: exemple

Les trois signaux

- $x_1(n) = (0.8)^n u(n) + (1.25)^n u(n)$
- $x_2(n) = (0.8)^n u(n) - (1.25)^n u(-n-1)$
- $x_3(n) = -(0.8)^n u(-n-1) - (1.25)^n u(-n-1)$

ont la même transformée en z :

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1.25z^{-1}}$$

Les pôles sont: $p_1 = 0.8$ et $p_2 = 1.25$, ce qui induit dans le plan complexe 3 régions.

- le deuxième terme de x_1 diverge pour des valeurs n importantes
- le premier terme de x_3 diverge pour des valeurs importantes en négatif
- seul le signal x_2 est stable.

Fonction de transfert

fonction de transfert H :

- Spectre Y du signal de sortie y
- Spectre X du signal d'entrée x

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Réponse impulsionnelle

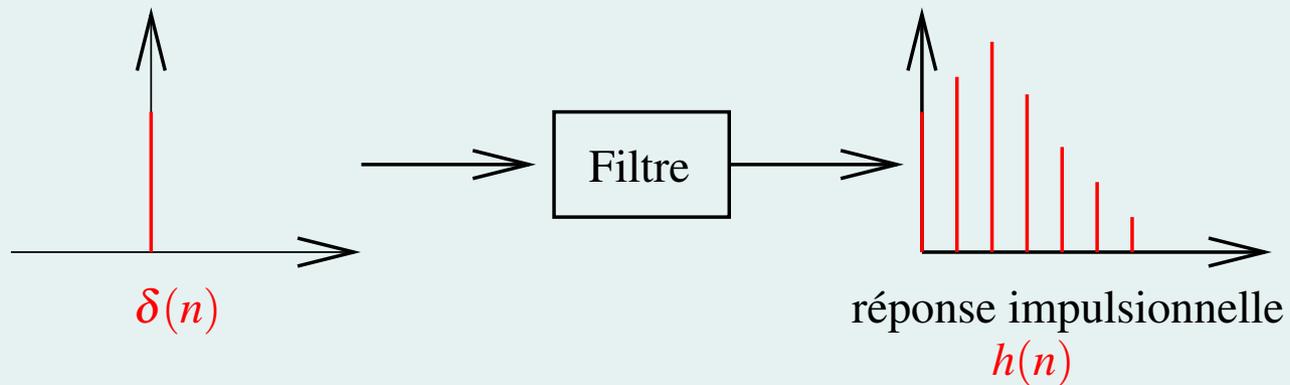
Multiplication sur le domaine fréquentielle \implies produit de convolution dans le domaine temporel.

Réponse impulsionnelle h d'un filtre:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

Réponse impulsionnelle

représente le signal en sortie d'un filtre pour un signal d'entrée de type impulsion.



Fonction de transfert: transformée en z de la réponse impulsionnelle h

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

Réponse impulsionnelle

Fonction de transfert: transformée en z de la réponse impulsionnelle h

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

avec $z = \exp(2\pi jf)$.

- **Ordre** du filtre: plus grand indice n tel que $h(n) \neq 0$
Filtre d'ordre N défini $N + 1$ valeurs $[h_0 h_1 \cdots h_N]$
- Un filtre est dit **causal** ssi sa réponse impulsionnelle est causale, c-a-d ssi $h(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

Équation aux différences

Un filtre peut être défini par une équation aux différences:

$$y(k) = \sum_{m=p}^M b_m x(k-m) + \sum_{n=1}^N a_n y(k-n)$$

où a_n et b_m sont réels et constants.

Comme l'ordre en x et y est 1, ce filtre est **linéaire**.

$p = 0$ si signal x causal

Équation aux différences

Les termes $\sum_{n=1}^N a_n y_{k-n}$ représentent la partie **réursive** du système

La forme générale d'une fonction de transfert est

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Stabilité

L'instabilité d'un filtre: divergence plus ou moins rapide des calculs successifs des échantillons de sortie.

Un système sera **stable** si tous les pôles de sa fonction de transfert présentent un module inférieur à 1

⇒ tous les pôles à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe.

Gain du filtre

Gain du filtre est donné par la fonction:

$$f \rightarrow |H(\exp^{2\pi jf})|$$

Filtre: exemple

Exemple de fonction de transfert $H(z)$:

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Calcul de la réponse impulsionnelle:

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = -2.5 + \frac{7.5}{1 - 0.8z^{-1}}$$

Le filtre est considéré **causal**:

$$h(n) = -2.5\delta(n) + 7.5(0.8)^n u(n)$$

Fonction de transfert: exemple

Possible de calculer directement h depuis la fonction de transfert H :

$$\begin{aligned}H(z) &= \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} \\(1 - 0.8z^{-1})H(z) &= (5 + 2z^{-1}) \\H(z) &= 0.8z^{-1}H(z) + 5 + 2z^{-1}\end{aligned}$$

Il est facile d'en déduire l'équation aux différences pour h :

$$h(n) = 0.8h(n-1) + 5\delta(n) + 2\delta(n-1)$$

Filtre: exemple

L'équation aux différences peut également être obtenus par la transformée en z :

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$y(n) = 0.8y(n-1) + 5x(n) + 2x(n-1)$$

- remplacer δ par x
- remplacer h par y

Filtre: exemple

Le filtre ainsi défini peut être appliqué à un signal x , par l'algorithme suivant:

- $x_s = x[0], y_s = y[0]$
- pour chaque indice i d'échantillon, faire
 - $y[i] = 0.8y_s + 5x[i] + 2x_s$
 - $x_s = x[i]$
 - $y_s = y[i]$

Réponse fréquentielle

La **réponse fréquentielle** de ce filtre peut être obtenue à partir de la transformée en z , en remplaçant z par $\exp^{2\pi j\nu}$ (ou $\exp^{j\omega}$), avec $\nu = \frac{f}{F_e}$.

Le filtre est **stable**, car la région de convergence, $|z| > 0.8$, contient le cercle unité.

$$H(z) = \frac{5 + 2z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$
$$H(\exp^{2\pi j\nu}) = \frac{5(1 + 0.4\exp^{-2\pi j\nu})}{1 - 0.8\exp^{-2\pi j\nu}}$$

$$|1 - a\exp^{-jx}| = \sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}$$

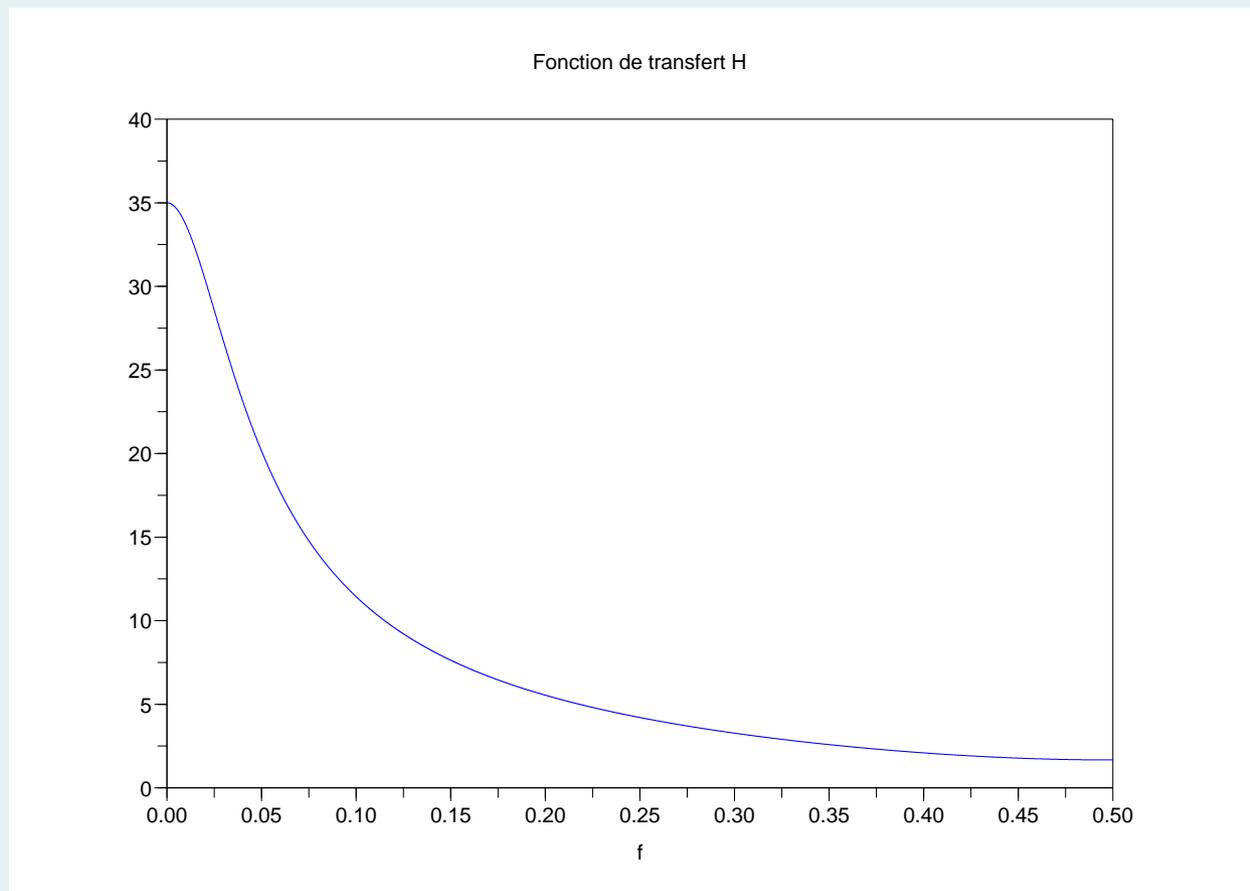
on peut en déduire

$$|H(\nu)| = \frac{5\sqrt{1 + 0.8\cos(2\pi\nu) + 0.16}}{\sqrt{1 - 1.6\cos(2\pi\nu) + 0.64}}$$

Filtre passe-bas

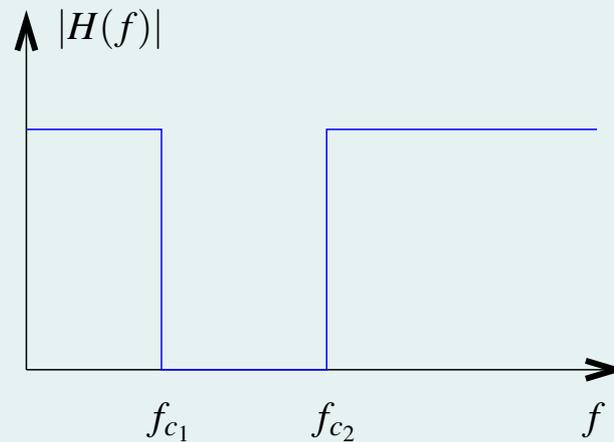
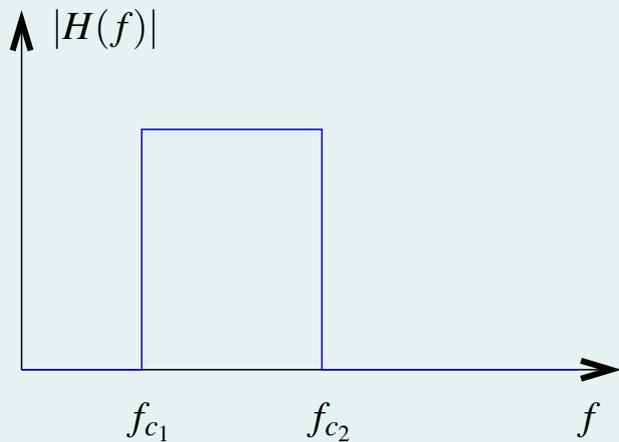
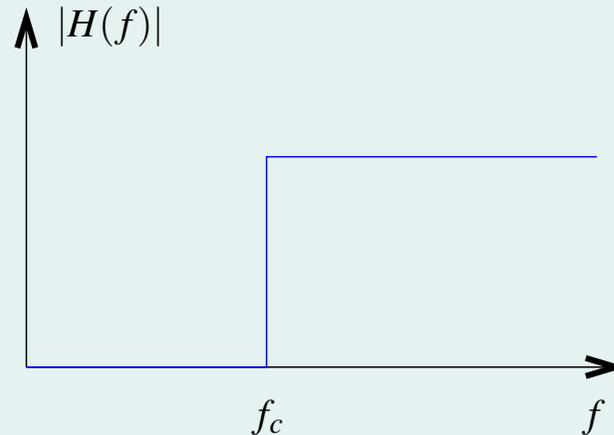
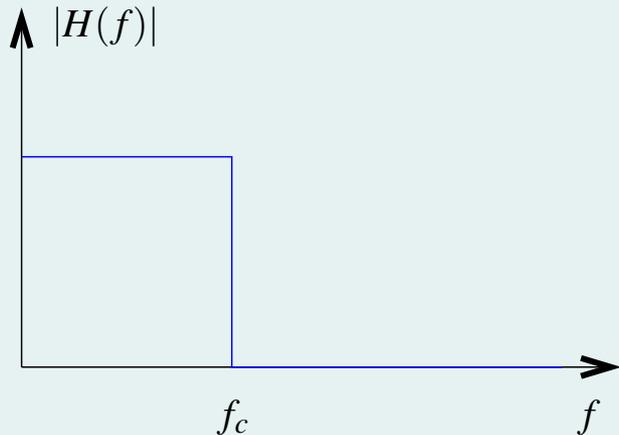
$$|H(\nu)| = \frac{5\sqrt{1 + 0.8\cos(2\pi\nu) + 0.16}}{\sqrt{1 - 1.6\cos(2\pi\nu) + 0.64}}$$

Atténue les hautes fréquences et amplifie les basses fréquences : filtre **passe-bas**.



Types de filtres

4 filtres idéaux : **passé-bas**, **passé-haut**, **passé-bande** et **coupe-bande**.



filtre LIT: filtre linéaire et invariant dans le temps.

Filtres IIR

Un **filtre IIR** : filtre à **réponse impulsionnelle infinie**.

Fonction de transfert:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Ces filtres sont aussi appelés **filtres récursifs**.

Filtres FIR

Un **filtre FIR** : filtre à **réponse impulsionnelle finie**.

Coefficients a_n sont tous nuls:

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

\implies réponse impulsionnelle de durée limitée à M termes.

Propriétés des filtres FIR

- Stabilité inconditionnelle car pas de pôle:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}$$

- Toute fonction de filtrage numérique stable et causale peut être approchée par la fonction de transfert d'un filtre FIR.
- Les filtres FIR peuvent générer des filtres à **phase linéaire**:

$$H(f) = R(f) \exp i\phi(f)$$

$$\phi(f) = \Phi_0 + 2\pi f\tau$$

Comparaison FIR/IIR

- Filtres FIR :

- faciles à concevoir
- toujours stables
- phase linéaire

- Filtre IIR:

- peuvent être instables
- besoin de moins de place mémoire et moins d'opérations
- Plus efficaces que les filtres FIR

⇒ Compromis efficacité/stabilité

Mise au point de filtres FIR

Plusieurs méthodes:

- Méthodes des fenêtres
- Méthodes d'échantillonnage des fréquences
- Algorithme de Remes
- Méthode des moindres carrés

Méthodes des fenêtres

La méthode des fenêtres est une des méthodes les plus simples et est particulièrement conseillée pour des réponses fréquentielles relativement *simples* (passe-bas, passe-haut, ...).

1. définir une réponse fréquentielle *idéale* notée $H(f)$.
2. La réponse impulsionnelle h correspondante peut donc être déduite directement par transformée inverse de Fourier:

$$h(n) = \int_{-\frac{F_e}{2}}^{\frac{F_e}{2}} X(f) \exp^{2\pi jfn} df$$

Exemple: filtre passe-bas

La réponse fréquentielle idéale est donnée par:

$$\begin{aligned} H_{\text{PB}}(f) &= 1 & \text{si } -F_c \leq f \leq F_c \\ H_{\text{PB}}(f) &= 0 & \text{si } f \leq -F_c \text{ ou } f \geq F_c \end{aligned}$$

Le calcul de la réponse impulsionnelle donne:

$$\begin{aligned} h_{\text{PB}}(n) &= \int_{-\frac{F_c}{2}}^{\frac{F_c}{2}} X(f) \exp^{2\pi jfn} df \\ h_{\text{PB}}(n) &= \int_{-F_c}^{F_c} \exp^{2\pi jfn} df \\ h_{\text{PB}}(n) &= \left[\frac{\exp^{2\pi jfn}}{2\pi jn} \right]_{-F_c}^{F_c} \\ h_{\text{PB}}(n) &= \frac{\exp^{2\pi jF_c n} - \exp^{-2\pi jF_c n}}{2\pi jn} \\ h_{\text{PB}}(n) &= \frac{\sin(2\pi F_c n)}{\pi n} \end{aligned}$$

avec $h_{\text{PB}}(0) = 2F_c$.

Autres filtres

- Filtre passe-haut:

$$h_{\text{PH}}(n) = \delta(n) - \frac{\sin(2\pi f_c n)}{\pi n}$$

- Filtre passe-bande:

$$h_{\text{BP}}(n) = \frac{\sin(2\pi f_b n) - \sin(2\pi f_a n)}{\pi n}$$

- Filtre coupe-bande:

$$h_{\text{BC}}(n) = \delta(n) - \frac{\sin(2\pi f_b n) - \sin(2\pi f_a n)}{\pi n}$$

⇒ filtres **complémentaires**:

$$h_{\text{PB}}(n) + h_{\text{PH}}(n) = \delta(n) \quad \Leftrightarrow \quad H_{\text{PB}}(n) + H_{\text{PH}}(n) = 1$$

$$h_{\text{BP}}(n) + h_{\text{BC}}(n) = \delta(n) \quad \Leftrightarrow \quad H_{\text{BP}}(n) + H_{\text{BC}}(n) = 1$$

Effets du fenêtrage

Réponse impulsionnelle de **durée infinie**

⇒ réponse impulsionnelle idéale pondérée par une fenêtre de pondération (ou d'apodisation) w :

$$\tilde{h}(n) = h(n)w(n)$$

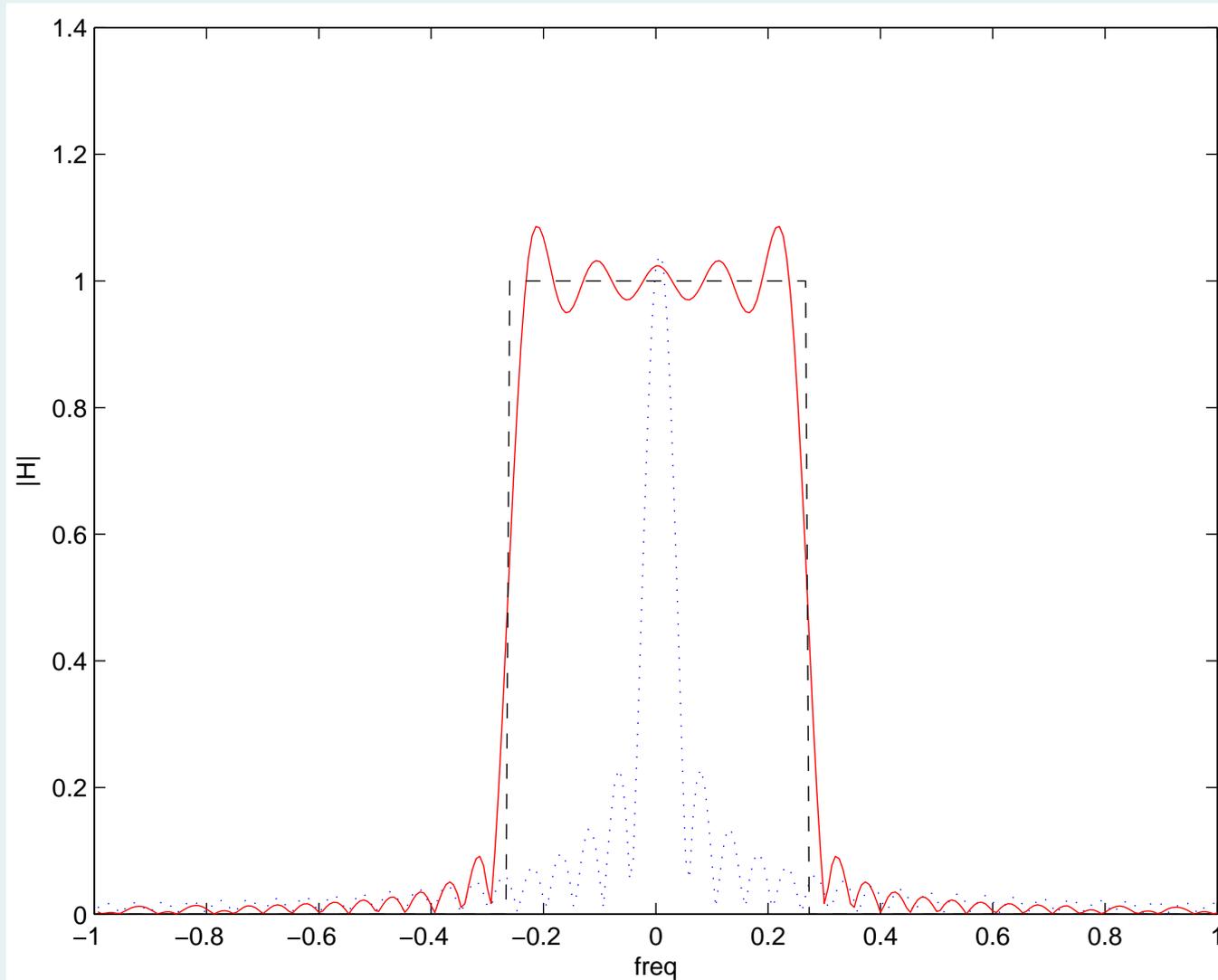
$$\tilde{H}(f) = H(f) * W(f)$$

La réponse fréquentielle est donc très différente de la réponse fréquentielle souhaitée:

- Présence d'**ondulations** et limitation de la raideur de coupure du filtre.
- Ces ondulations ont la même amplitude dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Phénomène de Gibbs

Phénomène (ou l'effet) de Gibbs,



Choix de l'ordre et bande de transition

L'ordre N du filtre est lié à la **bande de transition** (largeur ΔF de bande fréquentielle pour laquelle la réponse fréquentielle change de pallier):

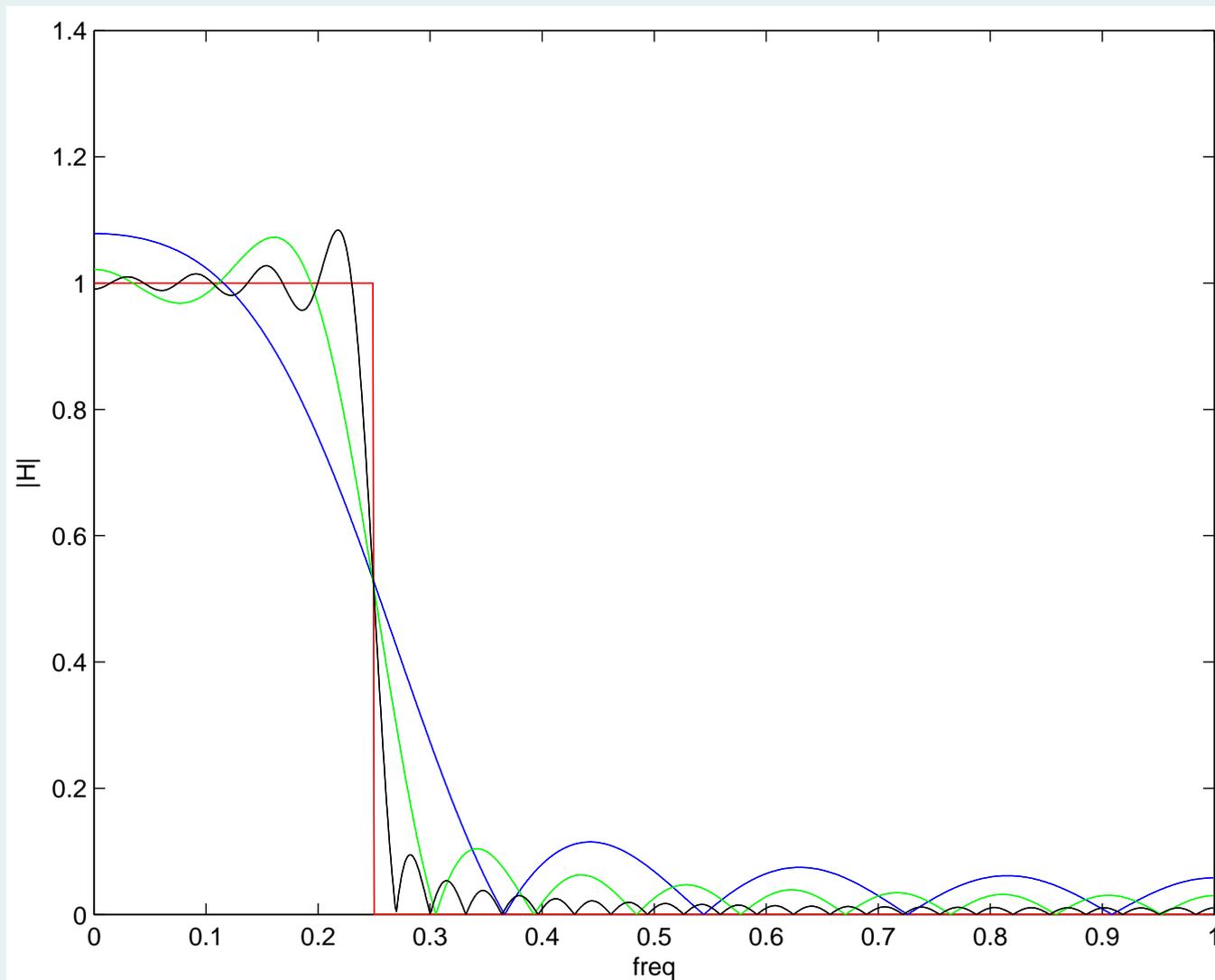
$$N\Delta F = K_0$$

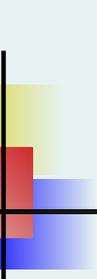
où K_0 est une constante.

Ordre N important \Leftrightarrow bande de transition petite, mais temps de calcul important.

Choix de l'ordre et bande de transition

filtre passe-bas ($N = 10$, $N = 20$ et $N = 60$)





Choix de la fenêtre

Fenêtre idéale: largeur de lobe principal faible, amplitude des lobes secondaires faibles

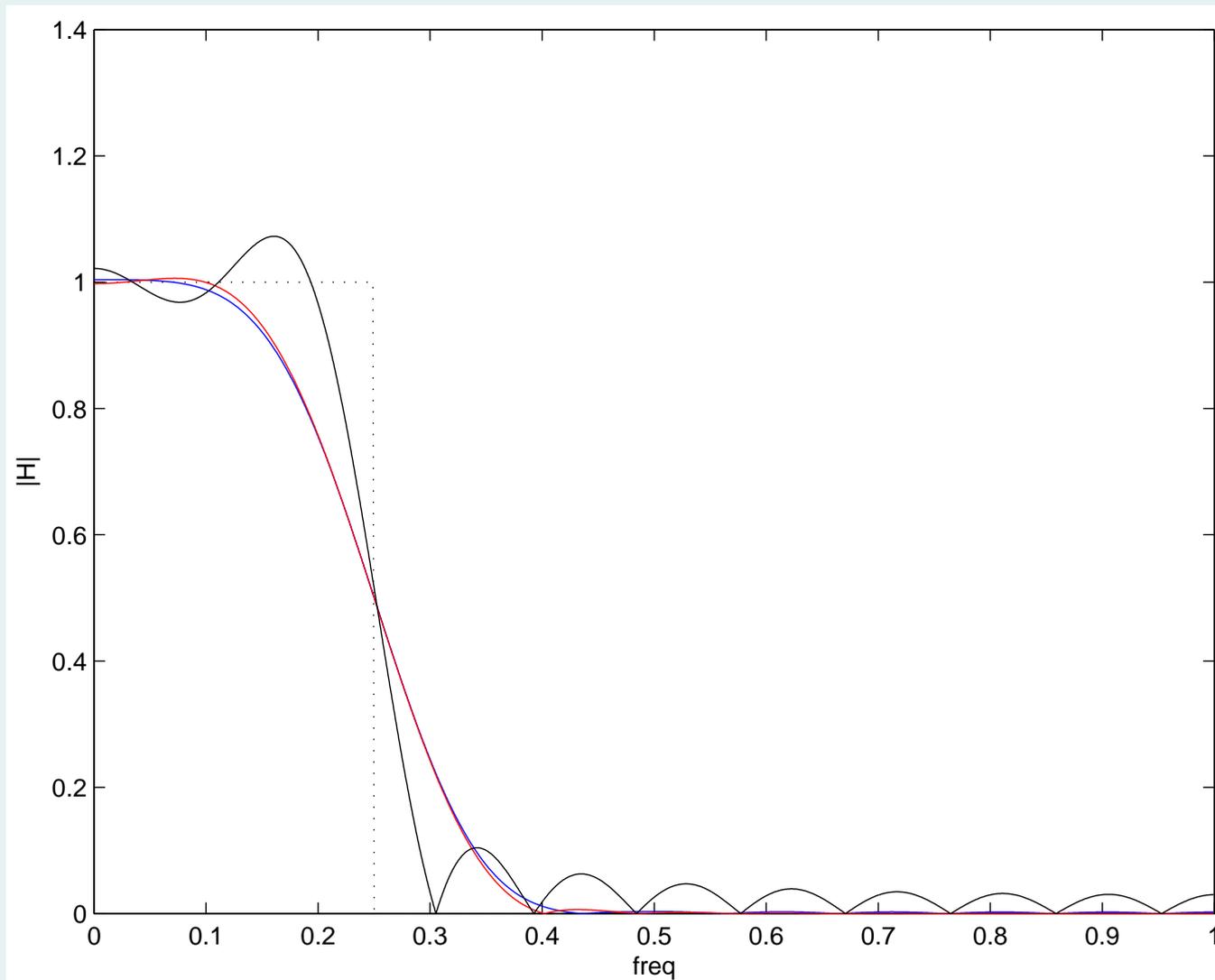
⇒ la fenêtre idéale n'existe pas.

⇒ compromis entre l'amplitude du lobe principal par rapport aux lobes secondaires et la largeur du lobe principal.

Une *bonne* fenêtre (par rapport à la fenêtre rectangulaire) améliore notablement la qualité du filtre synthétisé.

Choix de la fenêtre

Réponse impulsionnelle dans le cas d'un filtre passe-bas (ordre $N = 20$)
fenêtre rectangulaire (noir), Hamming (bleu), et Hann (rouge):



Causalité du filtre

La réponse impulsionnelle proposée doit correspondre à un filtre causal \implies décalage de $\frac{N-1}{2}$ échantillons (pour un ordre N):

$$h(n) = \tilde{h}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$

Cette opération de décalage peut aussi être effectuée dans le domaine fréquentiel:

$$H(n) = \tilde{H}(n) \exp\left(2\pi j f \frac{N-1}{2}\right)$$

Méthodes d'échantillonnage des fréquences

Cette autre méthode repose sur la transformée inverse de Fourier, et nécessite la connaissance de l'expression analytique de la réponse fréquentielle $H(f)$.

1. La réponse fréquentielle est échantillonnée:

$$H(k) = H(f) \Big|_{f=\frac{k}{N}}$$

2. La réponse impulsionnelle est calculée par transformée inverse de Fourier:

$$\tilde{h}(n) = \frac{1}{N} \sum_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} H(k) \exp^{2\pi j \frac{kn}{N}}$$

3. La réponse impulsionnelle doit enfin être décalée et fenêtrée:

$$h(n) = w(n) \tilde{h}\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$

Autres algorithmes

- Algorithme de Remes

Algorithme itératif qui permet de construire le polynôme adéquat qui approche la réponse fréquentielle du filtre souhaité: la solution calculée par cet algorithme induit une distribution uniforme de l'ondulation sur l'ensemble de la bande passante.

- Méthode des moindres carrés

Minimisation de la *différence* entre la réponse fréquentielle idéale et la réponse fréquentielle calculée.

Mise au point de filtres IIR

Les filtres IIR sont essentiellement mis au point en se basant sur la mise au point de filtres analogiques (définis en temps continu).

⇒ conversion de ces filtres analogiques en filtres numériques.

- La transformation bilinéaire permet de transformer une réponse fréquentielle en une transformée en Z .
- La réponse impulsionnelle du filtre analogique est échantillonnée.

Filtrage par FFT

A partir de la réponse impulsionnelle h d'un filtre, nous pouvons calculer la réponse fréquentielle H par application de la transformée de Fourier discrète:

$$y(n) = x(n) * h(n) \Leftrightarrow Y(k) = X(k)H(k)$$

Le signal résultant du traitement est donc finalement obtenu par transformée inverse de Fourier de Y :

$$y(n) = \text{IFFT}(\text{FFT}(X(n)).\text{FFT}(H(n)))$$

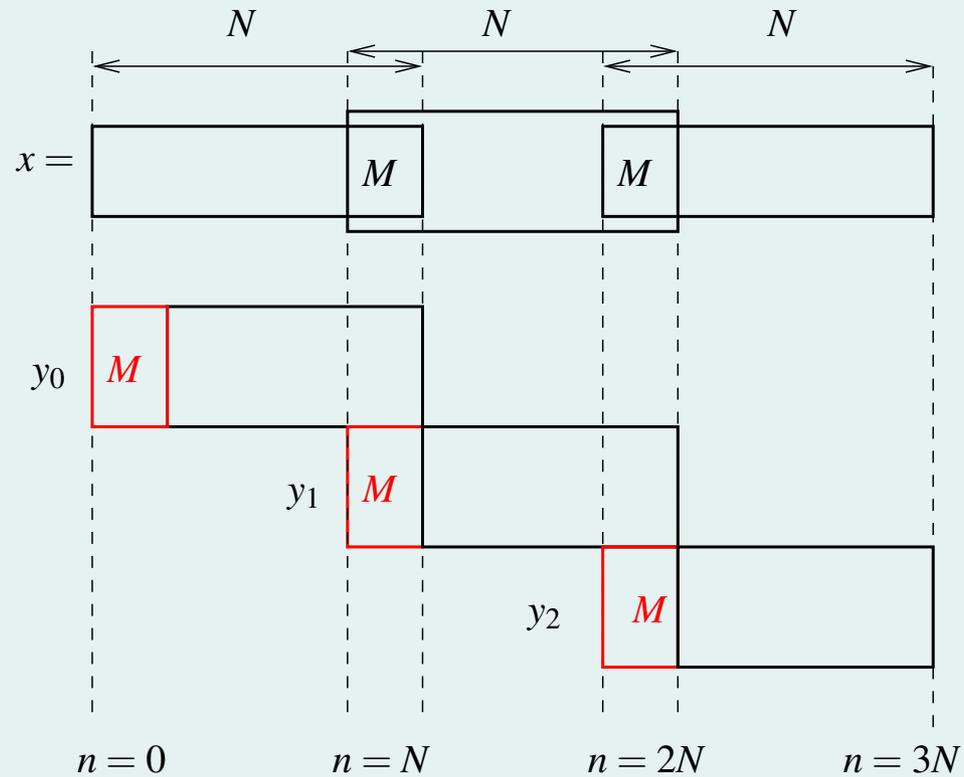
Filtrage par FFT: complexité

La complexité de cette méthode est liée à la taille des transformées de Fourier effectuées.

Lorsque l'ordre du filtre devient important (plus de 100), il est alors préférable de passer par la transformée de Fourier.

Appliquer cet algorithme à des portions de taille N .

Filtrage par FFT: overlap-save



Le résultat sur une portion y doit être amputé des M premiers échantillons...

Filtrage par FFT: Méthode directe

L'opération revient alors à se placer dans le domaine spectral et à modifier le spectre, en atténuant ou en amplifiant certaines zones du spectre.

Attention, toutefois, cette méthode n'est pas aussi précise qu'elle en a l'air:

- la précision fréquentielle est liée à la taille de la portion traitée;
- il est nécessaire de traiter le signal par portions successives, et il y a des risques de discontinuités entre chaque portion. Celles-ci peuvent être un inconvénient dans certaines applications (traitement du son par exemple).