

Examen

Durée : 3 heures
Aucun document autorisé

Exercice 1 : Etude d'un filtre (3 pts)

Nous définissons un filtre numérique par l'équation aux différences suivante :

$$y[n] = x[n] - 0.81y[n-2]$$

1. Quelle est la signification de cette équation aux différences ? Comment appliquer le filtre ainsi défini ?
2. Ce filtre numérique est-il un filtre FIR ou IIR ? (vous pourrez rappeler ce que sont un filtre FIR et un filtre IIR).
3. Donner la fonction de transfert associée à ce filtre.
4. Calculer la réponse fréquentielle et le gain du filtre. Calculer les valeurs du gain en $f = 0$, $f = \frac{1}{4}$, $f = \frac{1}{2}$ (unité normalisée).
5. Donner un schéma de ce gain. En déduire le type de ce filtre.

Exercice 2 : Réalisation d'un filtre FIR passe-bande (4 pts)

Nous souhaitons proposer un algorithme de filtrage passe-bande d'ordre 5. Le filtre considéré sera un filtre FIR. La fréquence d'échantillonnage sera notée f_e .

1. Donner la réponse fréquentielle relative au filtre idéal passe-bande de fréquences de coupures f_a et f_b ($0 < f_a < f_b < \frac{f_e}{2}$).
2. En appliquant la transformée de Fourier inverse à cette réponse fréquentielle, calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce filtre idéal.
3. En choisissant $f_a = \frac{1}{8}f_e$ et $f_b = \frac{1}{4}f_e$, donner la réponse impulsionnelle discrète $h[n]$ associée.
4. Calculer $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$.
5. Donner l'algorithme permettant d'appliquer ce filtre FIR ainsi défini.
6. Quelle est la différence avec le filtre de l'exercice précédent ?

Exercice 3 : Analyse spectrale (3 pts)

L'analyse spectrale par transformée discrète de Fourier d'un signal sinusoïdal de fréquence $F_0 = 176\text{Hz}$ est effectuée. La fréquence d'échantillonnage du signal est $F_e = 10000\text{Hz}$. La durée du signal est de $N = 1000$ échantillons.

1. Quelle est la durée (en seconde) du signal ?
2. Le spectre d'amplitude laisse apparaître 2 pics d'amplitudes importantes et plusieurs pics d'amplitudes faibles. Expliquer pourquoi.
3. Le premier pic correspond à la $k = 18$ ème valeur d'amplitude. Quelle est la fréquence estimée ?
4. Donner l'erreur maximale commise sur l'estimation de la fréquence.
5. Donner la valeur de N nécessaire pour avoir une précision inférieure à 2Hz.
6. Expliquer comment cette précision peut être améliorée en ne modifiant ni N , ni F_e .

Rappels de trigonométrie

$$\sin(x) = \frac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{2j}$$

où $j^2 = -1$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rappels de mathématiques

Une primitive de $\exp(\alpha x + \beta)$ est $\frac{1}{\alpha} \exp(\alpha x + \beta)$.

Rappels de traitement du signal

– Transformée inverse de Fourier

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi j f t} df$$

où $j^2 = -1$.

– Transformée discrète de Fourier (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

où x est un signal numérique de N échantillons.