

Examen

Durée : 3 heures

Aucun document autorisé

Exercice 1 : Modulation (4 pts)Nous considérons le signal $s(t)$ échantillonné à 10000 Hz.

$$s(t) = \cos(2\pi f_m t) \cos(2\pi f_M t + \phi)$$

avec f_m , f_M et ϕ réels.

Nous effectuons la transformée discrète de Fourier d'une portion de ce signal de durée 100 ms.

1. Quelle(s) opération(s) doit-on effectuer pour obtenir le spectre d'amplitude de cette portion de signal ?
2. Quelle est la taille (en nombre d'échantillons) de ce spectre d'amplitude ?
3. Schématiser le spectre d'amplitude théorique que l'on devrait obtenir.
4. En pratique, pour des valeurs *importantes* de f_m , nous obtenons 4 pics dans le spectre. Expliquer pourquoi.
5. Nous souhaitons estimer la valeur de f_M .
 - Proposer un algorithme.
 - Quelle est l'erreur d'analyse maximale commise ?
 - Proposer une méthode permettant de réduire cette erreur.
6. Pour des valeurs *faibles* de f_m , nous obtenons seulement 2 pics dans le spectre. Expliquer pourquoi.
7. Quelle doit être la valeur minimale de f_m pour pouvoir observer 4 pics ?

Exercice 2 : Analyse spectrale et fenêtrage (4 pts)Nous notons $w_r^N(n)$ la fenêtre rectangulaire (de taille N échantillons) :

$$w_r^N(n) = 1, \quad \text{pour } 0 \leq n < N$$

$$w_r^N(n) = 0, \quad \text{sinon}$$

et $w_t^N(n)$ la fenêtre triangulaire (ou fenêtre de Bartlett) :

$$w_t^N(n) = \frac{2n}{N}, \quad \text{pour } 0 \leq n < \frac{N}{2}$$

$$w_t^N(n) = 2 - \frac{2n}{N}, \quad \text{pour } \frac{N}{2} \leq n < N$$

Le spectre de la fenêtre rectangulaire $w_r^{\frac{N}{2}}(n)$ (de taille $\frac{N}{2}$ échantillons) est

$$W_r^{\frac{N}{2}}(\tilde{f}) = \exp(-j2\pi \frac{\tilde{f}(N-2)}{4}) \frac{\sin(2\pi \frac{\tilde{f}N}{4})}{\sin(2\pi \frac{\tilde{f}}{2})}$$

où $\tilde{f}$ est la fréquence en unité normalisée, c'est-à-dire $\tilde{f} = \frac{f}{F_e}$ (F_e fréquence d'échantillonnage).

1. Soit le signal numérique $x = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1]$. Calculer le produit de convolution du signal x par lui-même. Quel est la taille du signal résultant ?

2. Dans le cas général, on peut établir que $w_t^N(n) = w_{r^{\frac{N}{2}}}(n) * w_{r^{\frac{N}{2}}}(n)$, (où $*$ désigne le produit de convolution). Quel est le lien entre le spectre de la fenêtre triangulaire et le spectre de la fenêtre rectangulaire ?
3. En déduire que le spectre $W_t^N(n)$ de la fenêtre de Bartlett $w_t^N(n)$ s'écrit sous la forme

$$W_t^N(\tilde{f}) = \exp(-j2\pi \frac{\tilde{f}(N-2)}{2}) \left[\frac{\sin(2\pi \frac{\tilde{f}N}{4})}{\sin(2\pi \frac{\tilde{f}}{2})} \right]^2$$

4. Proposer une représentation graphique du spectre d'amplitude $|W_t^N(\tilde{f})|$.
5. Estimer la largeur du lobe principal.
6. Estimer le rapport entre l'amplitude du lobe principal et l'amplitude du premier lobe secondaire.
7. Nous effectuons l'analyse spectrale d'un signal ($N = 1000$ échantillons) composé d'une sinusoïde de fréquence 1000 Hz, échantillonnée à 10000 Hz. Quelles vont être les valeurs du spectre discret obtenu d'amplitude non nulle ? Proposer un schéma du spectre obtenu.
8. Même question pour une sinusoïde de fréquence 990 Hz.
9. Même question pour une signal composé de deux sinusoïdes de fréquences 990 et 1000 Hz.

Rappels de trigonométrie

$$\begin{aligned}\cos(p) \cos(q) &= \frac{1}{2} [\cos(p-q) + \cos(p+q)] \\ \sin(p) \sin(q) &= \frac{1}{2} [\cos(p-q) - \cos(p+q)] \\ \sin(p) \cos(q) &= \frac{1}{2} [\sin(p+q) + \sin(p-q)]\end{aligned}$$

Rappels de traitement du signal

- Transformée discrète de Fourier (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

où x est un signal numérique de N échantillons.

- Produit de convolution

Le produit de convolution (opérateur noté $*$) de deux signaux discrets h et x est défini par :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$