Master BioInformatique

Année : 2011/2012 — Session de avril 2012

PARCOURS : Master 1
UE J1BS8203 : Méthodes et outils pour la biologie des systèmes
Épreuve : Examen
Date : Mardi 10 avril 2012
Heure : 10 heures
Durée : 2 heures
Documents : autorisés
Épreuve de M. Alain Griffault

SUJET + CORRIGE

Avertissement

- La plupart des questions sont indépendantes.
- L'espace laissé pour les réponses est suffisant (sauf si vous utilisez ces feuilles comme brouillon, ce qui est fortement déconseillé).

Question	Points	Score
Automates de recherche de motifs	4	
Parcours en profondeur de graphes	4	
Graphes pondérés	4	
Variantes plus court chemin à origine unique	8	
Total:	20	

Exercice 1: Automates de recherche de motifs (4 points)

(a) (2 points) Pour les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, dessinez l'automate de recherche du motif *aabab*.

Solution:

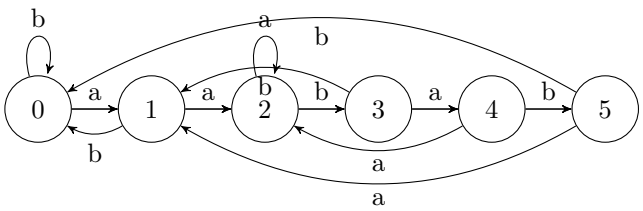


Figure 1 – Recherche de *aabab*

(b) (2 points) On dit d'un motif P qu'il est *non recouvrable* si $(P_k \sqsupseteq P_q) \Rightarrow (k = 0 \wedge k = q)$, c'est à dire que si les k premières lettres du motif forment un suffixe des q premières lettres de ce même motif, alors soit $k = 0$, soit $k = q$. Donnez la particularité de l'automate d'un motif non recouvrable.

Solution: Toutes les arcs *retour* reviennent à l'état initial.

Exercice 2: Parcours en profondeur de graphes (4 points)

Donnez un graphe orienté G tel qu'il existe deux sommets u et v vérifiant :

- $u \rightsquigarrow v$
- $u.debut < v.debut$
- v n'est pas un descendant de u dans la foret en profondeur obtenue lors du parcours en profondeur.

Solution:

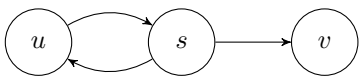


Figure 2 – Parcours en profondeur dans l'ordre (s, u, v)

Exercice 3: Graphes pondérés (4 points)

Vous admettrez la propriété suivante :

Propriété 1 *Soit $G(S, A, w)$ un graphe non orienté pondéré avec $w : A \to N$. Soient $T \subseteq A$ et $T' \subseteq A$ deux arbres couvrants de poids minimal. Soient $L_T = (a_0, \ldots, a_n)$ et $L_{T'} = (a'_0, \ldots, a'_n)$ les listes triées par poids croissant des arêtes de T et T'. Alors : $\forall\ i \in [0..n], w(a_i) = w(a'_i)$. Informellement, la liste ordonnée des poids des arêtes constituant un arbre couvrant est unique.*

Soit $G(S, A, w)$ un graphe non orienté pondéré. Montrer que pour chaque arbre couvrant de poids minimal T de G, il existe un moyen pour que l'algorithme de Kruskal retourne comme résultat T.

Solution: Soit $G(S, A, w)$ un graphe non orienté pondéré avec $w : A \to N$. Soit $T \subset A$ un arbre couvrant de poids minimal. Soit $L_T = (a_0, \ldots, a_n)$ la liste triée par poids croissant des arêtes de T. Soit L_{A-T} la liste triée par poids croissant des arêtes de $A - T$.

Soit L la liste triée par poids croissant des arêtes de T obtenue par fusion des listes L_T et L_{A-T}, en donnant priorité aux éléments de L_T en cas d'égalité.

Il suffit d'appliquer l'algorithme de Kruskal en utilisant la liste triée L.

Exercice 4: Variantes plus court chemin à origine unique (8 points)

L'algorithme de Dijkstra

```
Initialisation(G,s){ // G(S,A,w) oriente
  pour u dans S faire {
    u.d <- MAXINT;     // infini
    u.pere <- nil;
  }
  s.d <- 0;
}

Relacher(u,v,w){
  si (v.d > u.d + w(u,v))
  alors {
    v.d <- u.d + w(u,v);
    v.pere <- u;
  }
}

Dijkstra(G,s){       // G(S,A,w) oriente
  Initialisation(G,s);
  F <- CreerTas(S); // F est un tas construit avec les valeurs de s.d
  tant que (F != {}) faire {
    u <- ExtraireMinimum(F);
    pour v element de u.adjacents faire {
      Relacher(u,v,w);
    }
  }
}
```

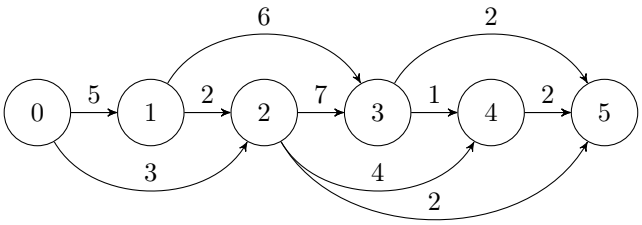
vu en cours calcule :

- Pour chaque sommet u, la distance $d(s, u)$ de u à la racine s.
- E : Une arborescence des plus courts chemins issus de s.

Soit $G(S, A, w)$ un graphe orienté pondéré **acyclique**. Il est alors possible d'améliorer l'algorithme de Dijkstra pour calculer une arborescence des plus courts chemins.

```
Dijkstra-acyclique(G){          // G(S,A,w) oriente acyclique
  L <- TriTopologique(G);       // L contient la liste chainee triee
  Initialisation(G,Tete(L));
  tant que (L != nil) faire {
    u <- Tete(L);
    L <- Queue(L);
    pour v element de u.adjacents faire {
      Relacher(u,v,w);
    }
  }
}
```

(a) (2 points) Donnez le résultat (`u.d` et `u.pere` pour chaque sommet) de l'algorithme `Dijkstra-acyclique` sur le graphe suivant.



sommet	0	1	2	3	4	5
u.d	0	5	3	10	7	5
u.pere	nil	0	0	2	2	2

FIGURE 3 – Un graphe orienté pondéré acyclique

(b) (2 points) Donnez la complexité de l'algorithme `Dijkstra-acyclique`.

Solution:
- La complexité du tri topologique est $\Theta(|S| + |A|)$ (vu en cours).
- La complexité de l'initialisation est $\Theta(|S|)$ (une boucle pour).
- Le nombre de passage dans le `tant que` est $|S|$.
- Le nombre de passage dans la boucle interne `pour` est $|A|$.

La complexité totale est donc : $\Theta(|S| + |A|)$.

Une variante de cet algorithme est utilisable pour calculer les chemins critiques dans un graphe $G(S, A, w)$ lorsque :
- Les arcs représentent les tâches à faire.
- Les pondérations représentent le temps nécessaire pour effectuer la tâche.
- les arcs $a_1 = (u, v)$ et $a_2 = (v, w)$ représentent deux tâches qui doivent être effectuées dans l'ordre a_1, a_2.

Un *chemin critique* est un *plus long* chemin dans le graphe, qui correspond au temps maximum requis pour effectuer une séquence ordonnée de tâches. Le poids d'un chemin critique est une borne inférieure du temps total nécessaire à l'exécution de toutes les tâches.

(c) (2 points) Adaptez les algorithmes précédents pour calculer les chemins critiques d'un graphe orienté pondéré acyclique.

Solution: Deux solutions :

1. Les distances sont initialisées à $-\infty$,

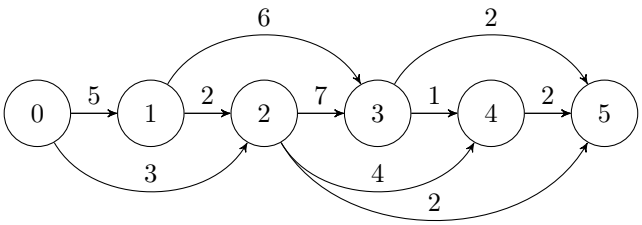
```
InitialisationCheminCritique(G,s){ // G(S,A,w) oriente
  pour u dans S faire {
    u.d <- -MAXINT;     // - infini
    u.pere <- nil;
  }
  s.d <- 0;
}
```

et le relachement augmente les distances.

```
RelacherCheminCritique(u,v,w){
  si (v.d < u.d + w(u,v))
  alors {
    v.d <- u.d + w(u,v);
    v.pere <- u;
  }
}
```

2. Toutes les valeurs de pondération sont multipliées par -1. Il suffit alors d'appliquer l'algotithme normal, puis de nouveau multiplier par -1 les distances obtenues.

(d) (2 points) Donnez le résultat (`u.d`, `u.pere` pour chaque sommet et le chemin critique) de votre algorithme sur le graphe suivant.



sommet	0	1	2	3	4	5
u.d	0	5	7	14	15	17
u.pere	nil	0	1	2	3	4

FIGURE 4 – Un graphe orienté pondéré acyclique

Chemin critique : $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ de longueur 17.