



Master BioInformatique

ANNÉE : 2009/2010

SESSION DE MARS 2010

PARCOURS : Master 1

UE TBS221 : Algorithmique 2ème partie

Épreuve : Examen

Date : Lundi 29 mars 2010

Heure : 10 heures

Durée : 2 heures

Documents : autorisés

Épreuve de M. Alain GRIFFAULT

SUJET + CORRIGE

Avertissement

- La plupart des questions sont indépendantes.
- L'espace laissé pour les réponses est suffisant (sauf si vous utilisez ces feuilles comme brouillon, ce qui est fortement déconseillé).

Exercice 1 (Divisibilité : Variante de recherche de motifs (4 points))

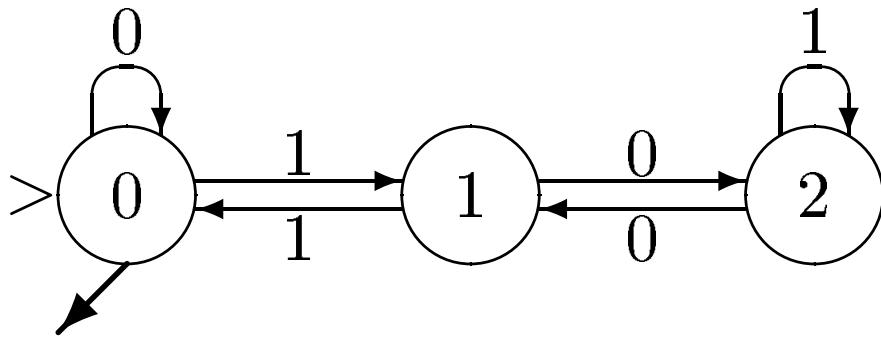


FIGURE 1 – Un automate de recherche de motifs

Question 1.1 (2 points) Compléter le tableau correspondant à la lecture du nombre binaire 1101010110100011 par l'automate de la figure 1.

		1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
Réponse :	état après	0	1	0	0	1	2	1	1	0	1	2	2	1	2	2
	état = 0	Oui		Oui	Oui				Oui							
	nombre reconnu	0		3	6				213							

Question 1.2 (2 points) Caractériser les nombres reconnus par l'automate de la figure 1.

Réponse : Les nombres binaires positifs qui sont des multiples de trois.

Exercice 2 (Chemins fiables : Variante des plus courts chemins pondérés (5 points))

Soit $G(S, A)$ un graphe orienté pondéré par une fonction de probabilité qui associe à chaque arc $(u, v) \in A$ un réel $p(u, v) \in [0..1]$. On interprète le réel $p(u, v)$ comme la probabilité que le moyen de communication entre les sommets u et v ne soit pas interrompu. On fera l'hypothèse que toutes ces valeurs sont indépendantes.

Propriété 1 (admise) Soit $G(S, A)$ un graphe orienté pondéré par une fonction de probabilité p à valeurs indépendantes. Soit s_0, \dots, s_n un chemin de longueur non nulle dans G . La probabilité que le chemin s_0, \dots, s_n ne soit pas interrompu est égale à $\prod_{0 \leq i < n} p(s_i, s_{i+1})$.

Question 2.1 (4 points) Adapter l'algorithme PCC_Dijkstra(G,p,r) vu en cours, pour obtenir un algorithme Chemin_Plus_Fiable(G,p,r,t) qui imprime à l'envers le chemin le plus fiable entre deux sommets r et t d'un graphe orienté pondéré.

Réponse :

```

Chemin_Plus_Fiable(G,p,r,t) {
    pour s dans S-{r} faire {
        s.proba = 0;
        s.pere := nil;
    }
    r.proba := 1;
    F := Creer_Tas(S); // pour l'ordre max
    tant que (Tas_Vide(F)=false) faire {
        u := Extraire_Max(F);
        pour v dans u.adjacents faire {
            si (v.proba < u.proba x p(u,v))
            alors {
                v.proba := u.proba x p(u,v);
                v.pere := u;
            }
        }
    }
    // impression du chemin de r a t (a l'envers!)
    aux := t;
    tant que (aux.pere != nil) faire {
        imprimer aux;
        aux := aux.pere;
    }
    si (aux = r)
    alors imprimer aux;
}

```

Question 2.2 (1 point) Donner la complexité de votre algorithme Chemin_Plus_Fiable(G,p,r,t).

Réponse : $\Omega(S \times \log(S))$ et $O(S \times \log(S) + A)$

Exercice 3 (Graphe biparti : Variante parcours en largeur (5 points))

Définition 1 Un graphe biparti est un graphe non orienté $G(S, A)$ dans lequel S peut être partitionné en deux ensembles S_1 et S_2 tels que $(u, v) \in A$ implique soit $(u, v) \in S_1 \times S_2$, soit $(u, v) \in S_2 \times S_1$.

En d'autres termes, toutes les arêtes passent d'un ensemble à l'autre.

Propriété 2 (admise) Un graphe non orienté $G(S, A)$ est connexe si pour n'importe quel sommet $s \in S$, l'algorithme Parcours_Largeur(G,s) vu en cours colorie tous les sommets en noir.

En d'autres termes, toutes les sommets sont accessibles depuis n'importe quelle racine.

Question 3.1 (4 points) Compléter l'algorithme Parcours_Largeur(G,s) vu en cours, pour obtenir un algorithme Biparti_Connexe(G) qui retourne vrai si et seulement si le graphe G est biparti et connexe.

Réponse :

```

Biparti_Connexe(G) {
    // on utilise comme racine un sommet quelconque du graphe
    r := S[random()];
    pour s dans S-{r} faire {
        s.couleur := blanc;
        s.d = -1;
        s.pere := nil;
    }
    r.couleur := gris;
    r.d := 0;
    r.pere := nil;
}

```

```

F := Creer_File_Vide();
Enfiler(F,r);
tant que (File_Vide(F)=false) faire {
  u := Tete_File(F);
  pour v dans u.adjacents faire {
    si (v.couleur = blanc)
    alors {
      v.couleur := gris;
      v.d := v.d + 1;
      v.pere := u;
      Enfiler(F,v);
    }
    // RETOURNE FAUX SI G N'EST PAS BIPARTI
    sinon si ((u.d - v.d) modulo 2 = 0)
    alors retourner Faux;
  }
  Defiler(F);
  u.couleur := noir;
}
// RETOURNE FAUX SI G N'EST PAS CONNEXE
pour s dans S-{r} faire {
  si (s.couleur != noir)
  alors retourner Faux;
}
retourner Vrai;
}

```

Question 3.2 (1 point) Donner la complexité de votre algorithme Biparti_Connexe(G).

Réponse : $\Omega(S)$ et $O(S + A)$

Exercice 4 (Nombre de chemins entre deux sommets : Variante du tri topologique (6 points))

Définition 2 Un graphe orienté est acyclique si pour toutes paires $(s, t) \in S \times S$, l'existence d'un chemin $s \rightsquigarrow t$ implique la non existence d'un chemin $t \rightsquigarrow s$.

En d'autres termes, il n'y a pas de circuit dans le graphe.

Question 4.1 (2 points) Soit t un sommet d'un graphe orienté acyclique. Soit u un sommet quelconque, notons $u.\text{nbCheminsVers}T$ le nombre de chemins reliant le sommet u au sommet t . Par convention, nous poserons $t.\text{nbCheminsVers}T = 0$.

Donner une propriété reliant $u.\text{nbCheminsVers}T$ aux nombres $v.\text{nbCheminsVers}T$ pour tous les sommets v adjacents de u .

Réponse : Deux cas : si $t \in u.\text{adj}$ alors $u.\text{nbChemins} = \sum_{v \in u.\text{adj}} v.\text{nbChemins} + 1$
 sinon $u.\text{nbChemins} = \sum_{v \in u.\text{adj}} v.\text{nbChemins}$

Question 4.2 (3 points) Inspirer vous de l'algorithme Tri_Topologique(G) vu en cours pour écrire un algorithme Dag_Comptage_Chemin(G,s,t) qui retourne le nombre de chemins reliant s à t .

Réponse :

```

Visiter_PP(u, t) {
  // Le paramètre t est ajouté pour l'algorithme de comptage de chemins
  // code classique de Visiter_PP
  u.couleur := gris;
  u.debut := date;
  date := date+1;
  pour v dans u.adjacent faire {
    si (v.couleur = blanc)
    alors {
      v.pere := u;
      Visiter_PP(v, t);
    }
  }
}

```

```

}
u.couleur := noir;
u.fin := date;
date := date+1;
// Ajout pour le tri topologique
Inserer_Tete_Liste(F,u);
// Ajout pour le calcul du nombre de chemins de u a t
pour v dans u.adjacent faire {
    u.nbCheminsVersT := u.nbCheminsVersT + v.nbCheminsVersT;
    si (v = t)
        alors u.nbCheminsVersT := u.nbCheminsVersT + 1;
}
}

Parcours_Profondeur(G) {
    pour u dans S faire {
        u.couleur := blanc;
        u.pere := nil;
    }
    date := 0;
    pour u dans S faire {
        si (u.couleur = blanc)
            alors Visiter_PP(u);
    }
}

Tri_Topologique(G) {
    pour u dans S faire {
        u.couleur := blanc;
        u.pere := nil;
    }
    date := 0;
    F := Creer_Liste_Vide();      // pour le resultat du tri topologique
    pour u dans S faire {
        si (u.couleur = blanc)
            alors Visiter_PP(u);
    }
    retourner F;
}

Dag_Comptage_chemin(G,s,t) {
    pour u dans S faire {
        u.couleur := blanc;
        u.pere := nil;
        u.nbCheminsVersT := 0;          // pour le comptage de chemins
    }
    date := 0;
    Visiter_PP(s,t);
    retourner s.nbCheminsVersT;
}

```

Question 4.3 (1 point) Donner la complexité de votre algorithme Dag_Comptage_Chemin(G,s,t).

Réponse : $\Omega(S)$ et $O(S + A)$