LANGAGES FORMELS ET RÉÉCRITURE

Géraud Sénizergues

LaBRI
Université de Bordeaux I
**

1 INTRODUCTION

1.1 Présentation

Nous exposons ici certains résultats reliant la théorie de la réécriture de mots (que l'on appelle aussi théorie des systèmes *semi-Thuéiens*) avec la théorie des langages formels.

Les systèmes de Thue ont été définis par A.Thue en 1914 ([Thu14]) et ont fait l'objet de nombreux travaux du point de vue de la décidabilité des problèmes portant sur les relations $\xrightarrow[S]{*}$, $\xleftrightarrow[S]{*}$, engendrées par le système (voir les contributions de G.Lallement [Lal94]et de Y.Matiyasevich [Mat94] dans ce volume).

La théorie des langages formels a pour objet les ensembles de mots(écrits sur un alphabet X). Elle s'occupe notamment de classifier ces ensembles suivant le type de mécanisme qui permet de les engendrer (grammaires, morphismes itérés,...)ou de les reconnaître (automates, morphismes dans une structure algébrique, formules logiques,...).

Un système semi-Thuéien fournit à l'évidence un moyen d'engendrer des mots: on peut définir un langage L $\subset X^*$ comme l'ensemble des mots dérivant d'un axiome $u \in X^*$ modulo un système semi-Thuéien S .Etudier les liens entre ce procédé de définition et les autres procédés cités plus haut apparaît comme une préoccupation naturelle en théorie des langages.

Il revient à Maurice Nivat d'avoir mis au jour ce sujet d'étude dans les années 1970 et d'avoir mené à bien ou impulsé les premiers travaux systématiques sur ce thème ([Ben69, Niv70, Niv71, CN71, Coc71, NB72, But73b, But73a, Coc75, Coc76, Ber77][3]). Depuis cette époque des chercheurs de toutes origines

** adresse postale:LaBRI et UER Math-info, Université Bordeaux1
351 Cours de la libération -33405- Talence Cedex.
adresse électronique:ges@labri.u-bordeaux.fr
fax: 56-84-66-69

[3] [B$\ddot{6}$4, Gre67] et [McN67] échappent à ce schéma;[McN67] est cité dans [Niv70] comme une source d'inspiration

ont contribué à cette étude des liens entre systèmes semi-Thuéiens et langages ([AB92, BS86, Ben87, Boa80, BN84, BO85, Boo87, BJW82, BO93, Car91, Cau88, Cau89, Cau93, Cho79, Cho82, Jan88, Kie79, MNOZ93, McC93, MNO88, NOR86, Nar86, Nar90, O'D81, O'D83, Ott84, Ott87, OZ91, Ott92a, Ott92b, Sak79, Sén81, Sén85, Sén86, Sén87, Sén89, Sén90a, Sén90b, Zha92] [4]). Les théorèmes présentés ici auront donc (schématiquement) la forme suivante:

Théorème de caractérisation: Soit L un langage.Les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) L est dans la classe $\mathcal{C}$

(2) Il existe un système semi-Thuéien S de la classe $\mathcal{C}$ et un mot f tels que

$$L = [f]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$$

Lorsque l'on a seulement (1) $\Longrightarrow$ (2) nous dirons qu'il s'agit d'un théorème de *représentation* des langages de $\mathcal{C}$;
lorsque l'on a seulement (2) $\Longrightarrow$ (1) nous dirons qu'il s'agit d'un théorème de *structure* des classes de congruence des systèmes de $\mathcal{S}$.

Ces énoncés fournissent de nouveaux moyens d'investigation des propriétés des systèmes semi-Thuéiens ou des langages (comme on pouvait le voir dès les premiers travaux de [B6̋4, Gre67, McN67]).De telles *applications* à la réécriture ou aux langages seront systématiquement citées après chaque théorème de caractérisation.

[4] Cette liste de travaux est loin d'être exhaustive. On consultera avec profit les traités [Jan88, BO93]

1.2 Sommaire

2 PRELIMINAIRES

2.1 Propriétés des réductions abstraites

Soit E un ensemble et $\longrightarrow$ une relation binaire sur E que nous appellerons *réduction directe*. Nous utilisons les notations $\xrightarrow{i}$ pour tout entier $(i \geq 0)$, $\xrightarrow{*}, \xrightarrow{+}$ dans leur sens usuel (voir [Hue80] ou [Aut87, chapitre 2]). La relation inverse de $\longrightarrow$ sera notée $\longleftarrow$ ou $(\longrightarrow)^{-1}$. La relation $\longrightarrow U \longleftarrow$ est notée $\longleftrightarrow$. Les trois relations $\xrightarrow{*}, \xleftarrow{*}$ et $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ sont appelés respectivement réduction, dérivation et équivalence engendrées par $\longrightarrow$.

Nous considérons pour une relation $\longrightarrow$ les propriétés de confluence, confluence locale, la propriété de Church-Rosser et la propriété "être noethérienne" telles qu'elles sont définies en [Hue80] ou [Aut87, chapitre 2] .

Un élément $e \in E$ est irréductible modulo $(\longrightarrow)$ ssi il n'existe aucun $e' \in E$ tel que $e \longrightarrow e'$. Nous notons Irr $(\longrightarrow)$ l'ensemble des éléments de E qui sont irréductibles modulo $(\longrightarrow)$.

Un élément $e \in E$ est $\longrightarrow$-réductible si au contraire il existe $e' \in E, e \longrightarrow e'$.

Etant donnée une partie A de E, nous utilisons les notations suivantes :

$$< A >_{\xleftarrow{*}} = \{e \in E \mid \exists a \in A, a \xleftarrow{*} e\}$$

$$[A]\overset{*}{\longleftrightarrow}=\{e\in E\mid \exists a\in A, a\overset{*}{\longleftrightarrow} e\}$$

La relation $\longrightarrow$ est dite *partiellement confluente* sur A si et seulement si :

$$< A >\overset{*}{\longleftarrow}=[A]\overset{*}{\longleftrightarrow}$$

(ce qui revient à dire : $\forall a\in A, \forall e\in E$, si $a\overset{*}{\longleftrightarrow} e$ alors $\exists a'\in A$ tel que $a'\overset{*}{\longleftarrow} e$)

2.2 Réductions sur un monoïde libre

Considérons maintenant le cas particulier où $E = X^*$, le monoïde libre engendré par un alphabet X.

$\longrightarrow$ est dite *l-décroissante* (resp. *strictement l-décroissante*) ssi elle réduit (resp. réduit strictement) la longueur, c'est-à-dire :

$$\forall f\in X^*, \forall g\in X^*, f\longrightarrow g \Longrightarrow \mid f\mid \geq \mid g\mid (resp. \mid f\mid > \mid g\mid).$$

Nous utiliserons l'abréviation "stricte" au lieu de "strictement l-décroissante".

Une *valuation* sur X^* est un homomorphisme $\nu : (X^*, .)\longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ tel que, pour tout $x\in X, \nu(x)\neq 0$.

$\longrightarrow$ est dite *v-décroissante* (resp. *strictement v-décroisssante*) ssi, il existe une valuation ν sur X^*, telle que $\longrightarrow$ réduit (resp. réduit strictement) la valuation ν, c'est-à-dire :

$$\forall f\in X^*, \forall g\in X^*, f\longrightarrow g \Longrightarrow \nu(f)\geq (g)(resp.\nu(f) > \nu(g))$$

Nous utiliserons l'abréviation "v-stricte"pour "strictement v-décroissante".

2.3 Systèmes de réécriture contrôlés

La notion de *système de réécriture contrôlé* sur un alphabet X peut être considérée comme une extension de la notion de système semi-Thuéien sur X : à chaque règle $u\longrightarrow v$ est associé un ensemble de mots $K(u, v)$ qui est l'ensemble des contextes gauches en présence desquels la règle peut être appliquée : un mot pus peut être réécrit pvs seulement dans le cas où $p\in K(u, v)$.

Dans le cas particulier où pour toute règle $u\longrightarrow v, K(u, v)$ est le monoïde libre X^* tout entier, on retrouve la notion classique de système semi-Thuéien.

Donnons maintenant quelques définitions formelles.

Un système de réécriture contrôlé sur l'alphabet X est une partie S de $X^*\times X^*\times X^*$. Tout élément (l, u, v) de S est une *règle* de S. u est le *membre gauche* et v le *membre droit* de la règle (l, u, v). Nous notons MG(S) (resp. MD(S)) l'ensemble des membres gauches (resp. droits) des règles de S. La réduction directe engendrée par S (notée $\underset{S}{\longrightarrow}$) est définie par :

pour tous $f, g\in X^*, f\underset{S}{\longrightarrow} g$ ssi il existe $(l, u, v)\in S$ et $s\in X^*$ tels que $f = lus$ et $g = lvs$.

Nous disons alors que la règle (l, u, v) s'applique au mot f et conduit du mot f au mot g.

Les relations $\xrightarrow[S]{*}$ (*réduction engendrée par* S), $\xleftarrow[S]{*}$ (*dérivation engendrée par* S) et $\xleftrightarrow[S]{*}$ (*équivalence engendrée par* S) se déduisent de $\xrightarrow[S]{}$ selon les définitions générales valables pour toute réduction abstraite (voir §2.1). On vérifie que $\xleftrightarrow[S]{*}$ est la plus petite congruence droite de $(X^*, .)$ contenant l'ensemble $\{(lu, lv) \mid (l, u, v) \in S\}$. C'est pourquoi $\xleftrightarrow[S]{*}$ est appelée la *congruence droite engendrée par* S.

2.4 Classes de systèmes de réécriture contrôlés

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux classes de langages. Notons $\mathcal{C}_i(X)$ l'ensemble des langages sur l'alphabet X qui sont dans la classe $\mathcal{C}_i$ (pour $i \in \{1, 2\}$).

Nous appelons $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$-*décomposition* sur X tout ensemble fini

$$D = \{L_i \times V_i \times \{u_i\}\}_{i \in [1,n]}$$

tel que,

$$\forall i \in [1, n], L_i \in \mathcal{C}_i(X), V_i \in \mathcal{C}_2(X), u_i \in X^*.$$

Nous appelons composante de D tout élément $L_i \times V_i \times \{u_i\}$ de D.

A toute décomposition D est associé un système de réécriture contrôlé $\dot{D}$:

$$\dot{D} = \bigcup_{i=1}^{n} L_i \times V_i \times \{u_i\}$$

.

Nous dirons qu'un système de réécriture contrôlé S est dans la classe $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ ssi, il existe une $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$-décomposition D telle que $\dot{D} = S$. Nous dirons encore que S est un $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ système de réécriture contrôlé.

Nous mentionnons ci-dessous quelques classes de systèmes de réécriture contrôlés apparaissant dans la littérature. Nous notons Rec, Alg, Det, Rat, Fin respectivement les classes des langages récursifs, algébriques, algébriques déterministes, rationnels, finis et nous utilisons l'abréviation "c-système“ pour "système de réécriture contrôlé“.

La notion de Rec-Fin c-système a été introduite en [But73a] afin de donner un algorithme testant l'équivalence des grammaires simples qui, comme dans le cas des grammaires très simples ([But73b]), soit basé sur la comparaison de congruences finiment engendrées.

En fait, d'après [Cho79], les c-systèmes de [But73a] sont dans la classe Det-Fin. La notion de Rat-Fin c-système est étudiée en [Cho79, Cho82, Kie79] , en relation avec les notions de langages algébriques ou algébriques déterministes. Les systèmes semi Thuéiens rationnels, étudiés en [O'D81, O'D83] peuvent être considérés comme des cas particuliers de Rat-Rat-c-systèmes. De même les systèmes semi-Thuéiens algébriques, étudiés en [BJW82] sont des cas particuliers de Rat-Alg c-systèmes. Un résultat de [BN84] montre que tout Fin-Rat c-système engendre une réduction qui est une transduction rationnelle (nous revenons plus précisément sur ce résultat au §3.1). Dans ce qui suit nous appelons c-système fini tout c-système de la classe Rat-Fin. De même, nous appelons décomposition finie toute Rat-Fin-décomposition.

2.5 Propriétés combinatoires des systèmes de réécriture contrôlés

Soit S un c-système. S sera dit confluent, localement confluent Church-Rosser, noethérien, strictement l-décroissant, l-décroissant, strictement v-décroissant, v-décroissant si et seulement si la réduction directe $\underset{S}{\longrightarrow}$ possède cette propriété. Nous utiliserons la notation $Irr(S)$ au lieu de $Irr(\underset{S}{\longrightarrow})$ et nous écrirons qu'un mot f est S-irréductible (resp. S-réductible) au lieu de $\underset{S}{\longrightarrow}$-irréductible (resp. $\underset{S}{\longrightarrow}$-réductible).

Nous définissons maintenant des propriétés *combinatoires* qui dépendent vraiment du c-système S (et non de la réduction $\underset{S}{\longrightarrow}$ seulement).

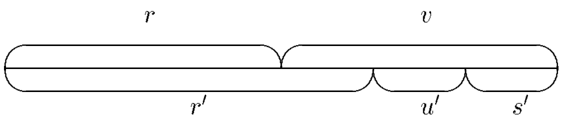
Définition : Considérons les conditions suivantes qui portent sur les règles d'un c-système S :

C1 : pour tous $(r,u,v),(r',u',v') \in S$ et tout $s' \in X^*$
$rv = r'u's'$ et $|r| \leq |r'| \Longrightarrow |s'| = 0$ et $|r| = |r'|$
C2 : pour tous $(r,u,v),(r',u',v') \in S$ et tout $s' \in X^*$
$rv = r'u's'$ et $|r| > |r'| \Longrightarrow |s'| = 0$ ou $|r'u'| \leq |r|$
C3 : pour tous $(r,u,v),(r',u',v') \in S$ et tout $s \in X^*$
$rvs = r'u's'$ et $|r| < |r'| \Longrightarrow |rv| \leq |r'|$
S est dit *basique à gauche* ssi il vérifie C1 et C2
S est dit *basique à droite* ssi il vérifie C1 et C3
S est dit *basique* ssi il vérifie C1, C2 et C3 (ce qui revient à dire que S est à la fois basique à gauche et à droite).

Chaque condition $C_i (i \in [1,3])$ peut être vue comme l'interdiction d'une certaine configuration de superposition de deux règles $(r,u,v),(r',u',v')$ de S.

Condition C1 : C1 exprime l'impossibilité de la configuration suivante: $rv = r'u's'$ où $| r | \leq | r' |$ et $| u' | < | v |$

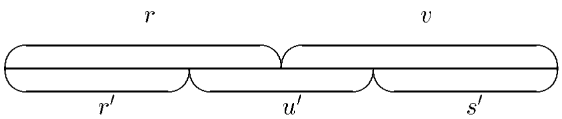
schéma 1:



Autrement dit, un membre droit de règle ne peut contenir strictement un membre gauche de règle.

Condition C2 : C2 exprime l'impossibilité de la configuration suivante: $rv = r'u's'$ où $0 < | s' |$ et $| r' | < | r | < | r'u' |$

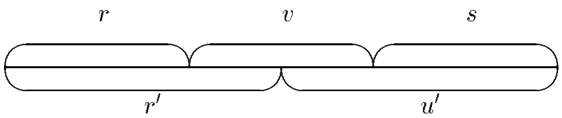
schéma 2:



Autrement dit, un membre droit de règle ne peut être "strictement chevauché à gauche" par un membre gauche de règle.

Condition C3 : C3 exprime l'impossibilité de la configuration suivante: $rvs = r'u'$ où $| r | < | r' | < | rv |$.

schéma 3:



Autrement dit, un membre droit de règle ne peut être "strictement chevauché à droite"par un membre gauche de règle.

Ces définitions ont été posées en [Niv70, Coc71, But73b, Sak79] dans le cas des systèmes semi-Thuéiens et ont été étendues aux systèmes contrôlés dans [But73a, Cho79]. Cette notion de système *basique* apparaît comme centrale dans l'étude des liens entre langages algébriques et congruences finiment engendrées (ou congruences droites engendrées par un c-système fini).

2.6 Systèmes semi-Thuéiens finis ou rationnels

Un système semi-Thuéien sur l'alphabet X est par définition un sous-ensemble T de $X^* \times X^*$. Lorsque T est un ensemble fini, on dit que T est un système semi-Thuéien fini. Un système semi-Thuéien T sur X est dit rationnel([O'D81, O'D83]) ssi il peut s'écrire sous la forme :

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \times \{u_i\}$$

où n est un entier naturel, chaque V_i est un langage rationnel sur X et chaque u_i est un mot sur X. A chaque système semi-Thuéien T sur X on peut naturellement associer un c-système $\overline{T}$ sur X en posant

$$\overline{T} = \{(l, u, v) \in X^* \times X^* \times X^* \mid (u, v) \in T\}$$

ou, de façon équivalente $\overline{T} = X^* \times T$. Il est clair que les réductions directes $\underset{\overline{T}}{\Longrightarrow}$ et $\underset{T}{\longrightarrow}$ sont égales (où $\underset{\overline{T}}{\Longrightarrow}$ est la relation définie au §2.3 et $\underset{T}{\longrightarrow}$ est la réduction engendrée par T, au sens usuel).

Par conséquent, l'un des deux systèmes $\overline{T}, T$ est confluent (resp. localement confluent, Church-Rosser, noethérien, strict, l-décroissant, v-strict, v-décroissant) ssi l'autre possède la même propriété.

Nous dirons que T est *basique à gauche* (resp. *basique à droite, basique*) lorsque $\overline{T}$ est basique à gauche (resp. basique à droite, basique) au sens de la définition 2.5 . Cette définition de la notion de système semi-Thuéien basique correspond aux définitions posées en [Niv70] et [Ber77].

Cette définition de la notion de système semi-Thuéien basique à gauche correspond, (à quelques détails près) à la définition posée en [Sak79].

Un système semi-Thuéien S est dit:

- *monadique* ssi $\forall (u, v) \in S, \mid v \mid \leq 1$
- *spécial* ssi $\forall (u, v) \in S, \mid v \mid = 0$

On notera que tout système semi-Thuéien monadique ou spécial est basique.

2.7 Références générales

Des survols du domaine des systèmes semi-Thuéiens (ne traitant pas exclusivement de leurs liens avec les langages formels) ont été écrits successivement en [Ber77, Boo87, Jan88, BO93].

Les notions de théorie des langages utilisées dans cet exposé sont classiques et peuvent être trouvées dans les traités de théorie des langages, par exemple [Aut87, Har78, HU79, KS86, Sal73].

3 LANGAGES RATIONNELS et RÉÉCRITURE

3.1 Systèmes de Büchi

Motivé par l'étude des systèmes de Post et notamment par le pouvoir d'expression obtenu lorsqu'on restreint l'usage des règles ou lorsqu'on autorise certaines variations dans cet usage, Büchi a étudié en [B6̈4, B9̈0] ce que nous appellerons la *réduction linéaire gauche* engendrée par un système semi-Thuéien S. La relation de réduction linéaire gauche immédiate, notée $\underset{lg\;S}{\longrightarrow}$ est définie par:

pour tous $f, g \in X^*$, $f \underset{lg\;S}{\longrightarrow} g$ ssi il existe $(u, v) \in S$ et $s \in X^*$ tels que $f = us$ et $g = vs$.

La relation de réduction linéaire gauche, notée $\overset{*}{\underset{lg\;S}{\longrightarrow}}$, est la clôture réflexive et transitive de la relation $\underset{lg\;S}{\longrightarrow}$.

La relation de *dérivation linéaire gauche* engendrée par S est l'inverse de la relation de réduction linéaire gauche et sera notée $\overset{*}{\underset{S\;lg}{\longleftarrow}}$. La *congruence droite* engendrée par S , notée $\overset{*}{\underset{lg\;S}{\longleftrightarrow}}$, est la clôture réflexive symétrique et transitive de la relation $\underset{lg\;S}{\longrightarrow}$

Théorème 3.1 ([B6̈4]) *Soit* $L \in X^*$.*Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) $L = < F >_{\overset{*}{\underset{S\;lg}{\longleftarrow}}}$

pour un ensemble fini $F \subset X^*$ *et un système semi-Thuéien fini* $S \subset X^* \times X^*$

(2) $L = < F >_{\overset{*}{\underset{S\;lg}{\longleftarrow}}}$

pour un ensemble fini $F \subset X^*$ *et un système semi-Thuéien fini* $S \subset X^* \times X^*$ *de la forme* $S = \{(f_i p_i, f_i) | 1 \leq i \leq n\}$

(3) L *est rationnel*

Complément 3.2 ([Coc75]) *Soit* $L \in X^*$.*Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(3) L *est rationnel*

(4) $L = [F]_{\overset{*}{\underset{lg\;S}{\longleftrightarrow}}}$

pour un ensemble fini $F \subset X^*$ *et un système semi-Thuéien fini* $S \subset X^* \times X^*$ *tel que* $\underset{lg\;S}{\longrightarrow}$ *est strictement décroissante et confluente.*

Le théorème 3.1 est utilisé en [Gre67] pour démontrer que la relation “calculée” par un automate à pile conserve la rationalité.

Le théorème suivant précise la structure de la relation $\xrightarrow[lg\,S]{*}$ elle-même.

Théorème 3.3 ([BN84, Cau88]) *Soit S une partie reconnaissable de $X^* \times X^*$. Alors $\xrightarrow[lg\,S]{*}$ est une transduction rationnelle.*

Ce théorème 3.3 est le noeud de la preuve du fait que le “centre” d'un langage algébrique est aussi algébrique ([BN84]).

3.2 Systèmes spéciaux

Appelons système *spécial* tout système semi-Thuéien $S \subset X^* \times \{\epsilon\}$. Notons MG($S$) l'ensemble des membres gauches d'un système semi-Thuéien S. Une partie P de X^* est dite *inévitable dans* X^* ssi le langage $X^* - X^*.P.X^*$ est fini.Un ordre $\preceq$ sur un ensemble E est un *bel* ordre ssi, pour toute suite $(e_i)_{0\leq i}$ d'éléments de E, il existe une suite strictement strictement croissante d'entiers

$$i_1 < i_2 \ldots i_j < i_{j+1} < \ldots$$

telle que

$$(e_{i_j})_{0\leq j} \text{ est une suite croissante pour } \preceq .$$

Enfin notons $\alpha(S)$ l'ensemble des lettres apparaissant dans les règles du système S.

Théorème 3.4 ([EHR83]) *Soit S un système semi-Thuéien fini, spécial sur un alphabet fini X que nous supposerons égal à $\alpha(S)$ et $L = <\epsilon>_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftarrow}}}$ .Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L est rationnel*

(2) *$MG(S)$ est inévitable dans X^**

(3) *$\xleftarrow[S]{*}$ est un bel ordre sur X^**

Un corollaire immédiat du théorème 3.4 est que la rationalité d'un langage de la forme $<\epsilon>_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftarrow}}}$, où S est fini, spécial, est décidable. (Rappelons que tout langage de cette forme est algébrique mais que le problème de la rationalité d'un langage algébrique est indécidable dans le cas général). Le théorème 3.4 est utilisé dans [Sén86] pour démontrer que tout langage rationnel du *groupe* libre engendré par un ensemble fini de générateurs X, a une congruence syntaxique qui est soit d'index fini (ce qui est toujours le cas dans le *monoïde* libre) soit est la relation d'égalité.

Etant donné un système semi-Thuéien S et un ensemble de mots W, nous notons $\Delta_S^*(W)$ l'ensemble des "descendants" de W modulo S c'est à dire:

$$\Delta_S^*(W) = \{v \in X^* | \exists w \in W, w \xrightarrow[S]{*} v\}$$

Théorème 3.5 ([BS86]) *Soit S un système de simplification , c'est à dire un système semi-Thuéien S tel que $\forall (u,v) \in S, |u| = 2, |v| = 0$. Alors*

(1) *pout tout langage rationnel R, $\Delta_S^*(R)$ est rationnel*
(2) *un automate fini reconnaissant $\Delta_S^*(R)$ peut etre construit en temps $O(n^3)$ à partir d'un automate fini de taille n reconnaissant R.*

Le premier théorème de ce type est apparu en [Ben69];une première généralisation a été donnée en [BO85] dont le théorème 3.5 améliore la complexité.
Remarques:

1. Le point (1) du théorème 3.5 peut s'exprimer ainsi: la relation $\xrightarrow[S]{*}$ conserve la rationalité.
2. Par contre la relation $\xrightarrow[S]{*}$ n'est pas en général une transduction rationnelle: en effet les langages $< R >_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ pour R rationnel et S système de simplification sont en général des algébriques non-rationnels
3. La conclusion (1) tombe en défaut dès que R est supposé seulement algébrique (voir la partie 6)
4. La conclusion (1) tombe en défaut dès que S est seulement suposé strictement décroissant (même si l'on suppose que $\xrightarrow[S]{}$ est confluente, voir partie 6)

Complément 3.6
(1) *Si l'on suppose S semi-Thuéien fini,basique,strict,la conclusion (1) reste vraie et la complexité (2) devient au plus $O(n^4)$ ([Ben87])*
(2) *Si l'on suppose S semi-Thuéien strict, fini, basique à gauche,la conclusion (1) reste vraie ([Sak79])*
(3) *Si l'on suppose S c-système strict, fini, basique à gauche, confluent, la conclusion (1) reste vraie ([Sén90b])*
(4) *Si l'on suppose S système semi-Thuéien quelconque (éventuellement infini non rationnel),basique, la conclusion (1) reste vraie ([Sén81] dans le cas général, [BJW82] pour le cas monadique)*[5]

Le théorème 3.5 permet de montrer que l'ensemble des parties rationnelles du groupe libre est stable par intersection et complémentaire ([Ben69]).Une application du théorème 3.5 aux protocoles de communication est donnée en [BO85]. Ce théorème 3.5 est un outil omniprésent dans les preuves des résultats de la partie 4.

[5] mais les propriétés "basique" et "monadique" se manient essentiellement de la même façon,bien que la première soit plus générale que la seconde

4 LANGAGES ALGÉBRIQUES DÉTERMINISTES ET RÉÉCRITURE

4.1 Caractérisations

Les langages *algébriques déterministes* sont, par définition, les langages reconnus par des automates à pile *déterministes* (voir [GG66, Aut87]).

Théorème 4.1 *Soit $L \subset X^*$.Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L est algébrique déterministe*
(2) $L = [R]_{\underset{S}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}}$

où R est un langage rationnel sur X^* et S un c-système strict,fini,basique,confluent

(3) $\#L\$ = [f]_{\underset{S}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}} \bigcap (X + \# + \$)^*$

où f est un mot de X^*, S un système semi-Thuéien v-strict,fini,basique à gauche, confluent et $\#, \$$ des lettres n'appartenant pas à l'alphabet X.

Preuve(s):

(1) $\Longrightarrow$ (2): est démontré en [Sén90a]
(2) $\Longrightarrow$ (3): est démontré dans [Sén90b]
(3) $\Longrightarrow$ (1): est démontré dans [Sak79]

Remarquons qu'une preuve directe de (2) $\Longrightarrow$ (1) est donné en [Cho79] et [Cho82].

Complément 4.2

- *Tous les théorèmes de structure* [6] *concluant à la propriété (1) sont contenus dans ce théorème 4.1 et, plus précisément, dans la partie* (2) $\Longrightarrow$ (1)
- *Tout langage algébrique déterministe vérifie la formule (3) pour un système S semi-Thuéien* strict, *fini et confluent ([MNO88]) (mais on ne sait pas s'il peut être choisi simultanément* strict, *fini,* basique à gauche *et confluent)*

4.2 Problème de l'équivalence des automates à pile déterministes

Rappelons que le problème de l'équivalence des automates à pile déterministes est le problème de décision suivant:étant donnés deux automates à pile déterministes A_1,A_2, les langages qu'ils reconnaissent,$L(A_1)$,$L(A_2)$, sont-ils égaux?

A ce jour on ne sait pas si ce problème est décidable ou non,malgré tous les efforts déployés pour le résoudre depuis qu'il a été énoncé dans [GG66]. Nous donnons ci-dessous quelques applications de la section précédente à ce domaine de recherche.

[6] connus de l'auteur, à la date où il écrit ces lignes

Application 4.3
(1)([Sén89]) *Le problème suivant est décidable*
instance: $L_1 = [R]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ *et* $L_2 = L(A)$

où S *est un système semi-Thuéien strict,rationnel,basique,confluent et* A *est un automate à pile déterministe quelconque*
question : $L_1 = L_2$*?*

(2)([Sén89] *Soit* $\mathcal{C}$ *une famille de langages qui est un* cylindre effectif. *Si le problème de l'équivalence est décidable pour les paires de langages* (L_1, L_2) *de cette famille, alors le problème de l'équivalence est décidable pour les paires de langages* (L_1, L_2) *où* L_1 *est dans* $\mathcal{C}$ *et* L_2 *est un algébrique déterministe quelconque.*
(3)([Sén90b] *Les problèmes suivants sont Turing-équivalents* [7]
(P1) *Le problème de l'équivalence des A.P.D.*
(P2) *Le problème "*$[f]_{\overset{*}{\underset{S_1}{\longleftrightarrow}}} = [f]_{\overset{*}{\underset{S_2}{\longleftrightarrow}}}$ *?"*

pour S_1, S_2 *systèmes semi-Thuéiens stricts,finis,basiques à gauche,confluents*
(P3) *Le problème "*$< f >_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftarrow}}} = [f]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ *?"*

pour S *système semi-Thuéien strict,fini,basique à gauche.*

Le résultat (1) est obtenu en combinant le théorème 4.1 avec le théorème de Valiant([Val74],[Bee76]).
Le résultat (2) est obtenu directement à partir du théorème 4.1 par la considération d'une notion de congruence syntaxique "avec contextes gauches"du langage L_1. Il résout (d'une certaine manière) le problème posé en [OIH81]: "peut-on trouver un scéma *général* d'extension de tout algorithme d'équivalence pour une sous-classe d'A.P.D.?"
Le résultat (3) est obtenu à partir du théorème 4.1,point (2) par une suite de transformations de systèmes de réécriture ([Sén90b, pages 318-340]).

D'autres résultats ont été obtenus au moyen de systémes de réécriture (sans être pour autant des corollaires ou prolongements du théorème 4.1):

- Le problème de l'équivalence est décidable pour les grammaires *parenthétiques* ([McN67]), les grammaires *de parenthèses*([Tak75]) et plus généralement les grammaires *NTS* ([Boa80, Sén85])et même les grammaires *pré*-NTS ([AB92]). L'étude de cette classe de grammaires et de généralisations se poursuit en [Zha92, McC93].
- Le meilleur algorithme connu testant l'équivalence des grammaires *simples* a été obtenu en [Cau89] en utilisant un système semi-Thuéien v-strict et confluent qui engendre la relation d'équivalence "engendrer le même langage"

[7] ils sont même "many-one" équivalents mais la preuve citée ne l'établit pas explicitement

sur les mots de l'alphabet de la grammaire;une généralisation aux automates *sans état* est donnée en [Cau93].

4.3 Problèmes de décision sur les systèmes de réécriture

Le théorème 4.1 et certaines applications(notamment 4.3) soulèvent naturellement des problèmes de décision sur les systèmes de réécriture.

Théorème 4.4 *La confluence d'un c-système strict,fini,basique à gauche est décidable*

Ce théorème a d'abord été démontré en [O'D83] dans le cas des systèmes semi-Thuéiens stricts,rationnels, monadiques, puis généralisé en [Sén90b] au cas énoncé ci-dessus.Signalons que ce problème devient indécidable pour les systèmes semi-Thuéiens stricts,rationnels ([O'D81, O'D83])(donc,a fortiori, pour les c-systèmes stricts,finis).

Théorème 4.5

(1) *Etant donnés* S_1, S_2 *systèmes semi-Thuéiens stricts,rationnels,confluents, on peut décider si* $\xleftrightarrow[S_1]{*} = \xleftrightarrow[S_2]{*}$

(2) *Etant donnés* S_1, S_2 *c-systèmes stricts,finis,confluents,basiques à gauche, on peut décider si* $\xleftrightarrow[S_1]{*} \subseteq \xleftrightarrow[S_2]{*}$

Le point (1) est démontré en [Nar86] et le point (2) en [Sén90b].Signalons que le problème (1) devient indécidable pour les c-systèmes stricts,finis,confluents ([Sén90b]).

Théorème 4.6

(1) *La confluence partielle* [8] *d'un système semi-Thuéien* S *strict, fini, basique, sur un ensemble* $R \subseteq Irr(S)$ *est décidable*

(2) *La confluence d'un système semi-Thuéien* S *strict, fini, monadique sur un ensemble de la forme* $\Delta_S^*(R)$ *où* R *est rationnel, est décidable.*

Le point (1) est démontré en [Ott87] dans le cas monadique et pour R réduit à un mot, puis en [Sén90b] dans le cas donné ci-dessus.Les preuves sont similaires et s'appuient essentiellement sur le théorème de Valiant ([Val74, Bee76]).Le point (2) est démontré en [Nar90].Remarquons que (1) (resp.(2)) devient indécidable pour des systèmes semi-Thuéiens S stricts, finis [Ott87, Sén90b] (resp. pour des systèmes semi-Thuéiens S l-décroissants, noethériens, finis [Car91]). La confluence partielle (ainsi que des propriétés analogues) est étudiée en [OZ91, Ott92a, Ott92b, MNOZ93, Zha92].

[8] voir la définition donnée au §2.1

5 LANGAGES ALGÉBRIQUES ET RÉÉCRITURE

Nous ne connaissons pas de théorème de caractérisation des langages algébriques en termes de systèmes de réécriture (au sens énoncé dans l'introduction).On peut néanmoins décrire ces langages à l'aide de ystèmes de réécriture *et de morphismes* de monoïdes libres: il suffit de remarquer que les langages algébriques sont les images par homomorphisme des langages algébriques déterministes, puis d'appliquer le théorème 4.1.Un énoncé plus fin est le suivant.

Théorème 5.1 (([But73b, Ber77])) *Soit* $L \in X^+$*.Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *Lest algébrique*

(2) $\exists Y \supseteq X, \exists F \subseteq Y^*, F$ *finie,*$\exists S$ *système semi-Thuéien strict,fini,basique,confluent,* $\exists \varphi : Y^* \longrightarrow X^*$*, morphisme strictement alphabétique, tels que*

$$L = \varphi([F]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$$

Preuve:

(2) $\Longrightarrow$ (1)**:** résulte du théorème 4.1

(1) $\Longrightarrow$ (2)**:** L admet une grammaire en forme normale de Greibach.Donc L est l'image par un homomorphisme strictement alphabétique d'un langage très simple M.Or, tout langage très simple est de la forme $[F]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ où F, S vérifient les condition de la propriété (2) ([But73b]).

Les langages algébriques de la forme $[f]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ pour S strict , fini, confluent forment une sous-famille de la famille des algébriques qui n'a pas de caractérisation connue en termes de grammaires.Une étude de cette famille est présentée en [Coc76]. Exemples:

(1) Le théorème 4.1,point(3), permet d'engendrer autant d'exemples *déterministes* que d'automates à pile déterministes

(2) En prenant les images-miroir des exemples de type (1) on obtient des exemples qui sont *déterministes-miroir* (mais non nécessairement déterministes)

(3) L'union d'un exemple de type (1) et d'un exemple de type (2) construits sur des alphabets disjoints, permet de construire un exemple qui n'est *ni déterministe, ni déterministe-miroir*, mais demeure *non-ambigu.*

(4) Il est possible de construire des exemples ambigus (i.e. *inhéremment ambigus*). Un tel exemple est donné en [Sén87, p.301-308].Cet exemple s'appuie sur les théorèmes de [Ber86] et de [AFG86] et consiste essentiellement à "coder" le morphisme de Thue-Morse ([Thu12, MH44]) par un système semi-Thuéien strict,fini, confluent.

Les couples (f, S) tels que la classe $[f]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}}$ soit algébrique forment un ensemble dont on ne sait pas grand-chose (en dehors des résultats de la section 4). Le théorème suivant montre qu'il n'est pas récursif.

Théorème 5.2 (([NOR86])) *Soit Ωune famille de langages algébriques contenant tous les langages finis. Alors*

(1) *$\exists S$semi-Thuéien,strict,fini,confluent tel que la question, étant donné $w \in X^*$*

$$[w]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}} \in \Omega?$$

est indécidable (et même Σ_1-hard)

(2) *La question,étant donné un système semi-Thuéien fini S*

$$\forall w \in X^*, [w]_{\overset{*}{\underset{S}{\longleftrightarrow}}} \in \Omega?$$

est indécidable (et même Π_2-hard)

Ce théorème resout négativement la question posée en [Coc71, p.72].Remarquons que ce théorème s'applique aussi aux familles

$$\Omega = \text{famille des langages rationnels}$$

et

$$\Omega = \text{famille des langages algébriques déterministes}$$

qui sont pourtant décrites par des familles de systèmes semi-Thuéiens (ou de c-systèmes) (voir sections 3 et 4).

6 LANGAGES RÉCURSIVEMENT ÉNUMÉRABLES ET RÉÉCRITURE

Théorème 6.1 ([O'D81, Ott84]) *Soit $L \subset X^*$.Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L est récursivement énumérable*
(2) *$\exists Y \supseteq X \cup \{\#, \bar{\#}, \$\}, \exists S$ système semi-Thuéien strict,fini,confluent et $\exists R \subseteq Y^*$ rationnel tels que*

$$\#\bar{\#}L\$ = [R]_{\underset{S}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}} \cap \#\bar{\#}X^*\$ = \Delta_S^*(R) \cap \#\bar{\#}X^*\$$$

Théorème 6.2 ([BJW82]) *Soit $L \subset X^*$.Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *L est récursivement énumérable*
(2) *$\exists Y \supseteq X, \exists S$ système semi-Thuéien fini,spécial,confluent et $\exists C \subseteq Y^*$ algébrique tels que*

$$L = [C]_{\underset{S}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}} \cap X^* = \Delta_S^*(C) \cap X^*$$

Ces deux théorèmes sont en quelque sorte des antithèses au "théorème de Benois" (théorème 3.5).Ils permettent de montrer "élégamment" (i.e. sans revenir à des codages directs de machines de Turing ou de problèmes de Post) de nombreux résultats d'indécidabilité sur les systèmes semi-Thuéiens ([Ott84, Ott87, Sén90b]).

Signalons l'application suivante à la théorie des langages.

Application 6.3 ([Sén90b]) *Le problème suivant est indécidable*

instance: Un mot f et deux sytèmes semi-Thuéiens S_1, S_2 finis,stricts,confluents.

question : $[f]_{\underset{S_1}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}} = [f]_{\underset{S_2}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}}$ *?*

Ce résultat résout négativement la question posée en [NB72, p.9]. Signalons que:

- si S_1 ou S_2 est en outre basique, alors le problème devient décidable ([Sén89])
- si S_1 ou S_2 est en outre basique à gauche, alors le problème devient équivalent au problème géneral de l'équivalence des A.P.D ([Sén90b],voir section 4).

References

[AB92] J.M. Autebert and L. Boasson. The equivalence of pre-nts grammars is decidable. *Math.Systems Theory 25*, pages 61–74, 1992.

[AFG86] J.M. Autebert, P. Flajolet, and J. Gabarro. Prefixes of infinite words and ambiguous context-free languages. *IPL 25 (4)*, 1986.

[Aut87] J.M. Autebert. *Langages algébriques.* Masson, 1987.

[Bee76] C. Beeri. An improvement on valiant's decision procedure for equivalence of deterministic finite-turn pushdown automata. *TCS 3*, pages 305–320, 1976.

[Ben69] M. Benois. Parties rationnelles du groupe libre. *C.R.Acad.Sci.série A*, pages 1188–1190, 1969.

[Ben87] M. Benois. Descendants of regular language in a class of rewriting systems:algorithm and complexity of an automata construction. *Proceedings RTA 87, LNCS 256*, pages 121–132, 1987.

[Ber77] J. Berstel. Congruences plus que parfaites et langages algébriques. *Séminaire d'informatique théorique de Paris6-7*, 1976-1977.

[Ber86] J. Berstel. Every iterated morphism yields a co-cfl. *IPL 22*, pages 7–9, 1986.

[B6̋4] J.R. Bűchi. Regular canonical systems. *Archiv fur Math.Logik und Grundlagenforschung 6*, pages 91–111, 1964.

[B9̋0] J.R. Bűchi. Regular canonical systems. *the collected works of J.R. Buchi*, pages 317–337, 1990.

[BJW82] R.V. Book, M. Jantzen, and C. Wrathall. Monadic thue systems. *TCS 19*, pages 231–251, 1982.

[BN84] L. Boasson and M. Nivat. Centers of context-free languages. *LITP technical report no84-44*, 1984.

[BO85] R.V. Book and F. Otto. Cancellation rules and extended word problems. *IPL 20*, pages 5–11, 1985.

[BO93] R.V. Book and F. Otto. *String Rewriting Systems.Texts and monographs in Computer Science.* Springer-Verlag, 1993.

[Boa80] L. Boasson. Grammaires à non-terminaux séparés. In *Proceedings 7th ICALP*, pages 105–118. LNCS 85, 1980.

[Boo87] R.V. Book. Thue systems as rewriting systems. *J.Symbolic Computation.3*, pages 39–68, 1987.

[BS86] M. Benois and J. Sakarovitch. On the complexity of some extended word problems defined by cancellation rules. *IPL 23*, pages 281–287, 1986.

[But73a] P. Butzbach. Sur l'équivalence des grammaires simples. In *Actes des Premières journées d'Informatique Théorique,Bonascre.* ENSTA, 1973.

[But73b] P. Butzbach. Une famille de congruences de thue pour lesquelles l'équivalence est décidable. In *Proceedings 1rst ICALP*, pages 3–12. LNCS, 1973.

[Car91] A.C. Caron. Linear bounded automata and rewrite systems : influence of initial configurations on decision properties. In *Proceedings CAAP 91*, pages 74–89. LNCS ,Springer-Verlag, 1991.

[Cau88] D. Caucal. Recritures suffixes de mots. *Internal report IRISA nr 413*, 1988.

[Cau89] D. Caucal. A fast algorithm to decide on simple grammars equivalence. *L.N.C.S.,Vol.401*, pages 66–85, 1989.

[Cau93] D. Caucal. A fast algorithm to decide on the equivalence of stateless dpda. *RAIRO Theoret.Infor.and App.*, pages 23–48, 1993.

[Cho79] L. Chottin. Strict deterministic languages and controlled rewriting systems. In *Proceedings 6th ICALP*. LNCS Springer-Verlag, 1979.

[Cho82] L. Chottin. Langages algébriques et systèmes de réécriture rationnels. *RAIRO Inform.Téor.16*, pages 1–20, 1982.

[CN71] Y. Cochet and M. Nivat. Une généralisation des ensembles de dyck. *Israel J. of Math. vol.9, n 3*, 1971.

[Coc71] Y. Cochet. Sur l'algébricité des classes de certaines congruences définies sur le monoide libre. *Thèse de l'université de Rennes*, 1971.

[Coc75] Y. Cochet. Congruences quasi-parfaites et langages rationnels. *Manuscrit non-publié*, 1975.

[Coc76] Y. Cochet. Langages définis par des congruences. *Groupe d'étude d'Algèbre ,1ère année,no 16*, pages 1–7, 1975/76.

[EHR83] A. Ehrenfeucht, D. Haussler, and G. Rozenberg. On regularity of context-free languages. *T.C.S.27*, pages 311–322, 1983.

[GG66] S. Ginsburg and S. Greibach. Deterministic context-free languages. *Information and Control 9*, pages 620–648, 1966.

[Gre67] S. Greibach. A note on pushdown store automaton and regular systems. *Proc.Amer.Math.Soc.*, pages 263–268, 1967.

[Har78] M.A. Harrison. *Introduction To Formal Language Theory*. Addison-Wesley, 1978.

[HU79] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory,Languages, and Computation*. Addison-Wesley, 1979.

[Hue80] G. Huet. Confluent reductions:abstract properties and applications to term rewriting systems. *JACM vol. 27 no 4*, pages 797–821, 1980.

[Jan88] M. Jantzen. *Confluent String Rewriting (EATCS monograph)*. Springer-Verlag, 1988.

[Kie79] F. Kierszenbaum. Les langages à opérateurs d'insertion. *Thèse de 3ième cycle , université Bordeaux I*, 1979.

[KS86] W. Kuich and A. Salomaa. *Semirings,Automata,Languages (EATCS monograph)*. Springer-Verlag, 1986.

[Lal94] G. Lallement. The word problem for thue systems. In *Actes de l'école de printemps d'informatique théorique, Font-Romeu 93*, 1994.

[Mat94] Y. Matiyasevich. Word problem for thue systems with a few relations. In *Actes de l'école de printemps d'informatique théorique, Font-Romeu 93*, 1994.

[McC93] R. McCloskey. Bounded context grammars and languages. *PHD*, 1993.

[McN67] R. McNaughton. Parenthesis grammars. *JACM 14*, pages 490–500, 1967.

[MH44] M. Morse and G.A. Hedlung. Unending chess,symbolic dynamics and a problem in semi-groups. *Duke Math. J.11*, pages 1–7, 1944.

[MNO88] R. McNaughton, P. Narendran, and F. Otto. Church-rosser thue systems and formal languages. *JACM 35 (2)*, pages 324–344, 1988.

[MNOZ93] K. Madlener, P. Narendran, F. Otto, and L. Zhang. On weakly confluent monadic string-rewriting systems. *T.C.S. 113*, pages 119–165, 1993.

[Nar86] P. Narendran. On the equivalence problem for regular thue systems. *TCS 44*, pages 237–245, 1986.

[Nar90] P. Narendran. It is decidable whether a monadic thue system is canonical over a regular set. *Math. Systems Theory 23*, pages 245–254, 19890.

[NB72] M. Nivat and M. Benois. Congruences parfaites et quasi-parfaites. *Séminaire Dubreil,2ième année,no 7*, 1971/72.

[Niv70] M. Nivat. On some families of languages related to the dyck language. *2nd Annual Symposium on Theory of Computing*, 1970.

[Niv71] M. Nivat. Congruences de thue et t-langages. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 6*, pages 243–249, 1971.

[NOR86] P. Narendran, C. O'Dunlaing, and H. Rolletschek. Complexity of certain decision problems about congruential languages. *JCSS 30*, pages 343–358, 1986.

[O'D81] C. O'Dunlaing. Finite and infinite regular thue systems. *PHD University of California at Santa Barbara*, 1981.

[O'D83] C. O'Dunlaing. Infinite regular thue systems. *TCS 2*, pages 171–192, 1983.

[OIH81] M. Oyamaguchi, Y. Inagaki, and N. Honda. The equivalence problem for two dpda's one of which is a finite-turn or one-counter machine. *J. Comput. System Sci.23,nr 3*, pages 366–382, 1981.

[Ott84] F. Otto. Some undecidability results for non-monadic church-rosser thue systems. *TCS 33*, pages 261–278, 1984.

[Ott87] F. Otto. On deciding the confluence of a finite string-rewriting system on a given congruence class. *JCSS 35*, pages 285–310, 1987.

[Ott92a] F. Otto. Completing a finite special string-rewriting system on the congruence class of the empty word. *Applicable Algebra in Engeneering Comm.Comput. 2*, pages 257–274, 1992.

[Ott92b] F. Otto. The problem of deciding confluence on a given congruence class is tractable for finite special string-rewriting systems. *Math. Systems Theory 25*, pages 241–251, 1992.

[OZ91] F. Otto and L. Zhang. Decision problems for finite special string-rewriting systems that are confluent on some congruence class. *Acta Informatica 28*, pages 477–510, 1991.

[Sak79] J. Sakarovitch. Syntaxe des langages de chomsky, essai sur le déterminisme. *Thèse de doctorat d'état de l'université Paris VII*, pages 1–175, 1979.

[Sal73] A. Salomaa. *Formal Languages*. Academic Press, 1973.

[Sén81] G. Sénizergues. Décidabilité de l'équivalence des grammaires nts. *Thèse de 3ième cycle,université Paris 7*, pages 1–170, 1981.

[Sén85] G. Sénizergues. The equivalence and inclusion problems for nts languages. *J. Comput. System Sci. 31(3)*, pages 303–331, 1985.

[Sén86] G. Sénizergues. On the rational subsets of the free group. *LITP internal report nr 86-3, submitted to Acta Informatica*, pages 1–17, 1986.

[Sén87] G. Sénizergues. Sur la description des langages algébriques déterministes par des systèmes de réécriture confluents. *Thèse d'état,université Paris 7 et rapport LITP 88-39*, pages 1–330, 1987.

[Sén89] G. Sénizergues. Church-rosser controlled rewriting systems and equivalence problems for deterministic context-free languages. *Information and Computation 81 (3)*, pages 265–279, 1989.

[Sén90a] G. Sénizergues. A characterisation of deterministic context-free languages by means of right-congruences. *TCS 70 (2)*, pages 213–232, 1990.

[Sén90b] G. Sénizergues. Some decision problems about controlled rewriting systems. *TCS 71*, pages 281–346, 1990.

[Tak75] M. Takahashi. Generalizations of regular sets and their application to a study of context-free languages. *Information and Control 27*, pages 1–35, 1975.

[Thu12] A. Thue. Uber die gegenseitiges lage gleicher teile gewisser zeichenreihen. *Skr.Vid.Kristiania,I Mat.Naturv.Klasse nr 8*, pages 1–67, 1912.

[Thu14] A. Thue. Probleme über veränderungen von zeichenreihen nach gegeben regeln. *Skr.Vid.Kristiania,I Mat.Naturv.Klasse nr 10,*, page 34 pp, 1914.

[Val74] L.G. Valiant. The equivalence problem for deterministic finite-turn push-down automata. *Information and Control 25*, pages 123–133, 1974.

[Zha92] L. Zhang. The pre-nts property is undecidable for context-free grammars. *IPL 44*, pages 181–184, 1992.