



La réécriture parfaite: développements et convergences

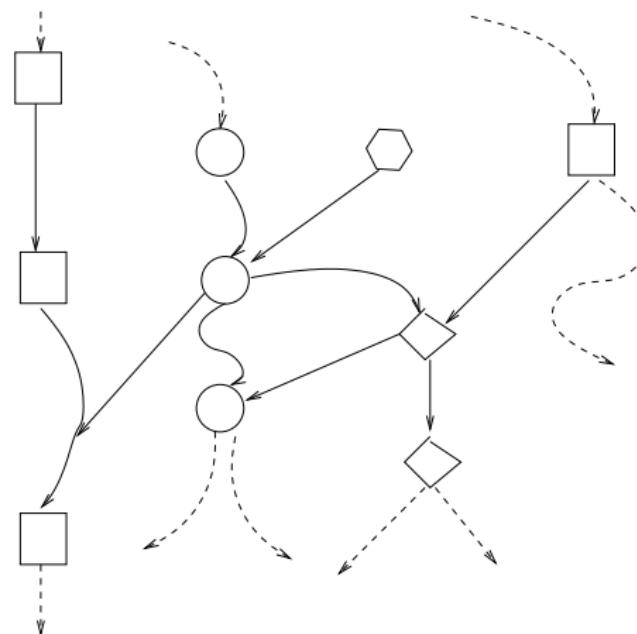
Géraud Sénizergues, (LaBRI, Bordeaux).

Mardi 06 Février 2018

Colloque à la mémoire de **Maurice NIVAT**

INTRODUCTION

Développements et convergences



contents

- 1 Introduction
- 2 Systèmes parfaits
- 3 Réécriture vs langages algébriques
- 4 Réécriture vs langages rationnels
- 5 Réécriture vs groupes
- 6 Réécriture vs linguistique computationnelle

Systèmes parfaits

Article de M. Nivat, ACM 1970

[2nd Annual Symposium on theory of Computing, 1970,
ACM. Proceedings, p. 221-225]

Article de M. Nivat, ACM 1970

2nd Annual Symposium on Theory of Computing 1970 ACM

ON SOME FAMILIES OF LANGUAGES RELATED TO THE DUCK LANGUAGE.

Haurice Nivat
Professeur,
Faculté des Sciences de Paris, France.

We recall that the Duck language on the alphabet of $2n$ letters $X = \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ is the equivalence class of the empty word $\lambda \in X^*$ modulo the Duck congruence generated on X^* by the $2n$ relations $x_i \bar{x}_i = \bar{x}_i x_i = \lambda \quad i \in \{1, \dots, n\}$. Indeed for all $x \in X^*$ the equivalence class of x modulo this congruence is a non ambiguous algebraic (i.e. context-free) language, the complement of which is also a non ambiguous algebraic language.

The same situation is true for the congruence generated on X^* by the n relations $x_i \bar{x}_i = \lambda \quad i \in \{1, \dots, n\}$. The author convinced himself that many other congruences have the same property [1].

He undertook the task of finding them systematically. Here is presented a part of the results of this undertaking. An important family of congruences is brought to light which have interesting decidability properties. In the constructions leading to these decidability properties we used as a guide line the nice paper of Mac Raughton [2]. Sufficient conditions are given in order that the equivalence classes (and their complements) of such a congruence be an algebraic language. We do not study in this paper the properties of these languages, this will be done elsewhere [3].

In the first part we do not give the proofs which will be written at length and published in French later on, since they are lengthy.

A - Quasi-perfect system of generators of a Duck congruence.

Let X be a finite alphabet, X^* the free monoid generated by X . For $\ell \in X^*$ we denote by $|\ell|$ the length of ℓ .

Let $E \subseteq \{f_i, g_i\}_{i=1, \dots, n}$ be a finite subset of $X^* \times X^*$ which will be called system of generators.

For all $\ell, g \in X^*$ we write $\ell \xrightarrow{E} g \iff \exists i \in \{1, \dots, n\}, u, v \in X^*$ such that $f_i = u \bar{v}$ and $g = u g_i v$

or $f_i = u \bar{v}$ and $\ell = u f_i v$

$\ell \xrightarrow{E} g \iff \ell \xrightarrow{E} g$ and $|\ell| > |g|$

$\ell \xrightarrow{E} g \iff f_i \xrightarrow{E} g$ and $|\ell| = |g|$.

We denote by \xrightarrow{E} , \xrightarrow{E} , \xrightarrow{E} the transitive closures of the relations \xrightarrow{E} , \xrightarrow{E} and \xrightarrow{E} respectively. So we have

$\ell \xrightarrow{E} g$ (resp. $\ell \xrightarrow{E} g$, resp. $\ell \xrightarrow{E} g$) \iff there exist a finite sequence of words of X^* , u_1, \dots, u_{k+1} such that $u_1 = \ell$, $u_{k+1} = g$ and for all $i \in \{1, \dots, k\}$: $u_i \xrightarrow{E} u_{i+1}$ (resp. $u_i \xrightarrow{E} u_{i+1}$, resp. $u_i \xrightarrow{E} u_{i+1}$).

It is well known that the relation \xrightarrow{E} is the smallest congruence Θ on X^* such that for all $i \in \{1, \dots, n\}$: $f_i \xrightarrow{E} g_i$. This congruence usually bears the name of the Duck congruence generated by the system of generators E .

A word $\ell \in X^*$ will be said irreducible modulo E if and only if the set $\{\ell \mid \ell \xrightarrow{E} \lambda\}$ is empty.

Definition : The finite set of generators $E \subseteq X^* \times X^*$ is said quasi-perfect if and only if $\forall h, h' \in X^*, h, h'$ irreducible mod E and $h \xrightarrow{E} h' \iff h \xrightarrow{E} h'$.

Our first theorem is :

Theorem 1 : The system of generators $E \subseteq X^* \times X^*$ is quasi-perfect if and only if it satisfies the following conditions

(c) $\forall u, v \in X^* :$

Article de M. Nivat, ACM 1970

Soit

$$S \subseteq X^* \times X^*$$

Le système S est **parfait** ssi, il réduit strictement la longueur et
 $\forall f \in X^*, \forall g \in X^*$

$$f \leftrightarrow_S^* g \Leftrightarrow \exists h, f \rightarrow_S^* h \leftarrow_S^* g.$$

Le système S est **quasi-parfait** ssi, $S = S_1 \cup S_0$ (S_1 réduit strictement la longueur, S_0 préserve la longueur) et

$$f \leftrightarrow_S^* g \Leftrightarrow \exists h, h' f \rightarrow_{S_1}^* h \leftrightarrow_{S_0}^* h' \leftarrow_{S_1}^* g.$$

Extensions de la perfection

Système préparfait [Cochet, Doctorat de 3ième cycle, 1971] :
 $S = S_1 \cup S_0$ (S_1 est strictement décroissant, S_0 préserve la longueur) et

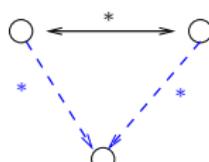
$$f \leftrightarrow_S^* g \Leftrightarrow \exists h, h' \quad f \rightarrow_S^* h \leftrightarrow_{S_0}^* h' \leftarrow_S^* g.$$

Système confluent sur le mot f_0 [Dehn, 1912] :

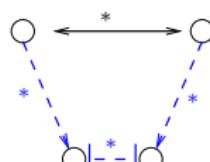
$$f \leftrightarrow_S^* f_0 \Leftrightarrow f \rightarrow_S^* f_0.$$

Système géodésique [Duncan-Diekert-Myasnikov, 2010] :
(f S -irréductible) \Rightarrow (f est minimal dans $[f](\leftrightarrow_S^*)$).

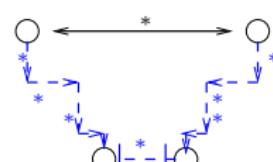
Extensions de la perfection



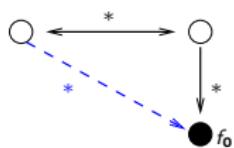
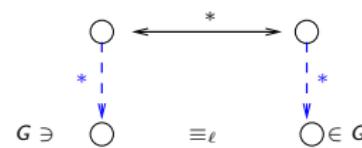
parfait



quasi-parfait



preparfait

confluant sur f_0 

geodesique

Décidabilité

Perfection est **décidable** [Nivat 1970]

Quasi-perfection est **décidable** [Nivat 1970].

Préperfection est **indécidable** [Narendran-McNaughton, TCS,1984].

Confluence sur un mot est **indécidable** [Sénizergues, TCS 1995]

Géodési-cité est **indécidable** [Duncan-Diekert-Myasnikov, 2010]

Compléction

[Duncan-Diekert-Myasnikov, 2010] :

Un **semi-algorithme “à la Knuth-Bendix”** pour les systèmes
quasi-parfaits.

Reécriture vs Langages algébriques

Système parfait non-algébrique

Exemple de classe **non-algébrique** ([M. Nivat, 1970]) :

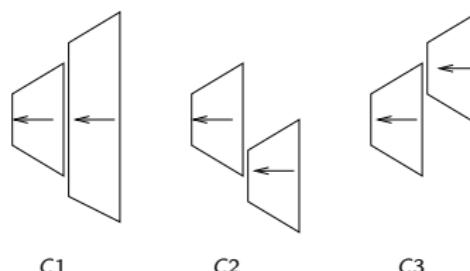
$$S := \{(aaabv, ab), (bbv, vb), (ccc, vc)\}$$
$$[abbc](\leftrightarrow_S^*) \cap a^*b^*c^* = \{a^{2n+1}b^{2^n+1}c^{2n+1}\}.$$

Question 1 : Quels sont les systèmes de réécriture dont les classes sont **algébriques** ?

Question 2 : Quels sont les langages algébriques qui sont **congruentiels** ?

Systèmes basiques

[Nivat, 1970], [Berstel, 1976]



S est dit :

basique à gauche ssi C1, C2 sont **impossibles**
basique ssi C1, C2, C3 sont **impossibles**

c-Systèmes

[Butzbach, 1973], [Sakarovitch, 1979], [Chottin, 1979]

Notion de **c**-système :

$$S = \bigcup_{i=1}^n R_i \times \{u_i\} \times \{v_i\}$$

où les R_i sont **rationnels**.

N.B. si $R_i = X^*$, le système S est semi-Thuéien.

Systèmes basiques

2/ ton automate: sauf erreur de ma part, c'est la traduction en langage d'automates de ma construction, au détail près (à savoir ~~moins~~ d'états/ensembles d'états); mais l'idée importante sous-jacente reste la même, à savoir: remis à jour des états. Je compterai en convaincre (si c'est nécessaire) dans une prochaine lettre, arguments et exemples à l'affût.

L'objet de la présente lettre est en fait le suivant: après une brève enquête j'ai procédé à l'arrestation de l'exemple suivant:

soit $\begin{cases} X = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}, z\} \\ A = \{az\bar{a}, bz\bar{b}\} \\ T = T_{R_1, H, R_2} \end{cases}$ avec $\begin{cases} H = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\} \\ R_1(a) = X^* b, R_2(a) = zX^* \bar{b} \\ R_1(\bar{a}) = X^* a z X^* \bar{b}, R_2(\bar{a}) = 1 \\ R_1(b) = X^* a, R_2(b) = z X^* \bar{a} \\ R_1(\bar{b}) = X^* b z X^* \bar{a}, R_2(\bar{b}) = 1 \end{cases}$

alors $T^*(A) = \{f z \bar{f}, f z \bar{f}' / f \in R\}$, langage non algébrique

avec $\begin{cases} R = X^+ - X^*(a^2 + b^2) X^* \\ f' = \text{le mot } f \text{ privé de sa dernière lettre} \end{cases}$

(rappel: $T_{R_1, H, R_2}(f) = \{f_1 \bar{f}_2 / h \in H, f = f_1 f_2, f_1 \in R_1, f_2 \in R_2\}$)

Systèmes basiques

Tentative de solution des problèmes de Quittin

T^1 est l'écriture $\sum_{k=1}^p (R_k, v_k)$, $R_k \in \text{Rab}(x^*)$, $v_k \in X^*$

Si $f \in X^*$, $f T^1 = \{ f, v_k f_k \mid k \in [r], f_i f_k = f, f_i \in R_k \}$

Si $L \subset X^*$, $L T^1 = \bigcup_{f \in L} f T^1$

$L T^* = \bigcup_{n \geq 0} L T^n$

Qb $L T^*$ est-il algébrique quand L l'est?

Idée On considère l'écriture $T^1' = \sum_{k=1}^p (X^*, y_k v_k \bar{f}_k)$

où y_k, \bar{f}_k sont des parenthèses qui $\notin X$.

φ est le morphisme qui efface les parenthèses

Si $f \in X^*$, $f T^1'$ est l'ensemble des mots qui se réduisent à f dans la réécriture qui efface un facteur

$y_k v_k \bar{f}_k$. Puisqu'il en peut définir

$g \rightarrow g'$ (g se réduit en g') \Leftrightarrow

$g = \alpha y_k v_k \bar{f}_k \beta$ et $g' = \alpha \beta$

$\Gamma(a) = \{ a' \mid a \xrightarrow{*} a' \}$ et

Systèmes basiques

Théorème

Soit $L \subset X^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(1) L est algébrique déterministe

(2) $L = [R](\leftrightarrow_S^*)$

où R est un langage rationnel sur X^* et S un
c-système strict, fini, **basique**, confluent

(3) $\#L\$ = [f](\leftrightarrow_S^*) \cap (X + \# + \$)^*$

où f est un mot de X^* , S un système semi-Thuéien
v-strict, fini, **basique à gauche**, confluent et $\#, \$$ des
lettres n'appartenant pas à l'alphabet X .

Systèmes basiques

Preuve(s) :

(3) \Rightarrow (1) : [Sakarovitch, thèse d'état 1979]

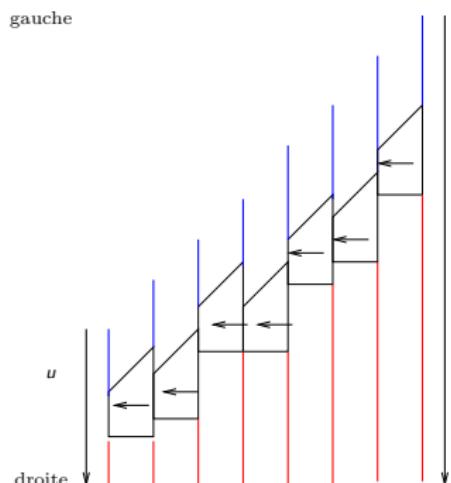
(2) \Rightarrow (1) : [Chottin, 6ième ICALP, 1979]

(1) \Rightarrow (2) : [Sénizergues, TCS 1990 (A)]

(2) \Rightarrow (3) : [Sénizergues, TCS 1990 (B)]

Systèmes quelconques

Stratégie de dérivation de droite à gauche :



Notation : $dg \leftarrow^* S$

Systèmes quelconques

Théorème (Sylvestre, thèse de doctorat, 2014)

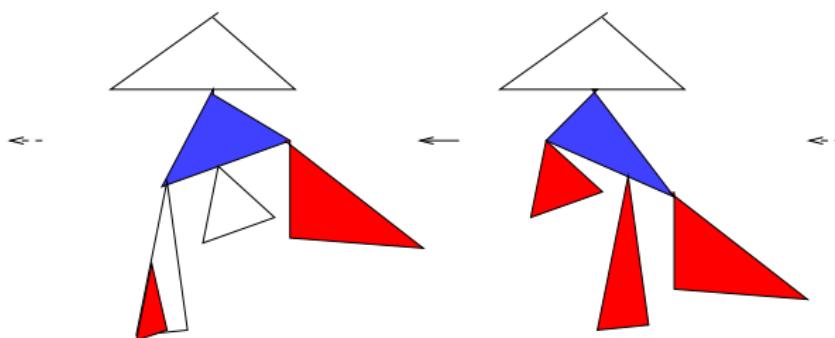
Soit S un système de réécriture fini sur X^* et R un langage rationnel. Alors $[R](\text{dg} \leftarrow_S^*)$ est algébrique.

Extensions :

- R algébrique \Rightarrow même conclusion
- R langage d'index $\Rightarrow [R](\text{dg} \leftarrow_S^*)$ est un langage d'index.

Réécriture de termes

Stratégie de dérivation de **bas-en-haut** :



Notation : $bh \leftarrow_s^*$

Réécriture de termes

Question : que peut-on dire des langages de **termes** de la forme

$$L = [t] \text{ } \textcolor{red}{bh} \leftarrow_S^*$$

pour S système de réécriture de termes, linéaire, fini ?

Reécriture vs Langages rationnels

Système “à la Dyck”

Théorème (Benois-Sakarovitch, IPL 1986)

Soit S un système de simplification, c'est à dire un système semi-Thuéien S tel que $\forall (u, v) \in S, |u| = 2, |v| = 0$. Alors

1- pour tout langage rationnel R , $[R](\rightarrow_S^*)$ est rationnel

2- un automate fini reconnaissant $[R](\rightarrow_S^*)$ peut être construit en temps $O(n^3)$ à partir d'un automate fini de taille n reconnaissant R .

Améliore [Benois, CRAS 1969], [Book-Otto 1985].

Réécriture linéaire droite

7

clear that $\rho'(\bar{u} v) = \bar{u}$ where $v = ve$.

Assume it is satisfied for all u' of length less than $n-1$ and consider $\rho'(\bar{u} v u'(n) \dots u'(1)) \neq 0$. Certainly $\rho'(\bar{u} v u'(n) \dots u'(2)) \neq 0$ and we need to distinguish between two cases.

- $v = v_2 u'(2) \dots u'(n)$ and $\rho'(\bar{u} v u'(n) \dots u'(2)) = \bar{u} v_1$
 Now $\rho'(\bar{u} v u') \neq 0 \Leftrightarrow u_2 = f_1 u'(1)$ or $\bar{u} v_1 \in (A \cup \bar{A})^*$
 $\bar{u} v_2 = f_1 u'(1) \Rightarrow v_2 = v_1 u'(1)$, $v = v_1 u'$ and $\rho'(\bar{u} v u') = \bar{u} v_1, v_2 = e \Rightarrow$
 $u' = u'(1)v$ and $\rho'(\bar{u} v u') = \bar{u} u'(1)$.

- $u'(2) \dots u'(n) = u_2 v$ and $\rho'(\bar{u} v u'(n) \dots u'(2)) = \bar{u} \bar{u}_2$.

Clearly $u' = u_1 v$ with $u_1 = u'(1)u_2$ and $\rho'(\bar{u} v u') = \bar{u} \bar{u}_2 u'(1) = \bar{u} \bar{u}_1$.

The lemma follows immediately for $\rho'(\bar{u} v u' v') = \rho'(\bar{u} v u') v' \square$

A result of fundamental importance in what follows is the following

Theorem 1 (Michèle Bencois [1]) :

If L is a rational language in $(A \cup \bar{A})^*$ the languages

$\rho(L)$ and $\rho^*(L)$ are also rational.

We do not prove it but use it to establish the following result we need.

Theorem 2 : If R is a recognizable EWRS and L is a rational language $L(R)$ is a rational language.

Proof : $L(R) = \{f(u, v) \mid f \in L, (u, v) \in R\}$
 $= \{(f(u, v) \mid f \in L, (u, v) \in R\}$
 $= \rho(L(R))$ if we define

$$\bar{R} = \{\bar{u} v \mid (u, v) \in R\}$$

It suffices to check that \bar{R} is rational if $R = \bigcup_{j=1}^p \bar{R}_j \times K_j$ is

recognizable. This is obvious since $R = \bigcup_{i=1}^p \bar{R}_i K_i$ if

$\bar{R}_i = \{\bar{u} \mid u \in R_i\}$ and clearly \bar{R}_i is rational if R_i is rational.

Remark : The result does not hold for rational EWRS since \hat{R} is generally not rational if R is rational not recognizable as one can see by considering \hat{A} (the set of all words of length n in A).

Réécriture linéaire droite

Théorème (Boasson-Nivat 1984)

Soit S une partie reconnaissable de $X^* \times X^*$ et L est une partie rationnelle de X^* . Alors

$$[L](\text{Id} \rightarrow_S^*)$$

est rationnelle.

Idée-clé :

$$\hat{S} := \{\bar{u}v \mid (u, v) \in S\}$$

$$\forall w \in X^*, \quad w(\text{Id} \leftarrow_S^*) = ((w \cdot \hat{S}^*) \leftarrow_D^*) \cap X^*$$

où D est le système

$$x\bar{x} \rightarrow \varepsilon \quad (x \in X).$$

Systèmes basiques à gauche

Théorème (Durand-Sénizergues, arxiv 2013, soumis à l-and-C)

Soit S une partie reconnaissable de $X^* \times X^*$ et L est une partie rationnelle de X^* . Alors

1-

$$[L](\textcolor{red}{dg} \rightarrow_S^*)$$

est rationnelle.

2- Un automate fini reconnaissant $[L](\textcolor{red}{dg} \rightarrow_S^*)$ peut être construit en temps $O(\textcolor{red}{n}^3)$.

Preuve :

on combine [Boasson-Nivat 1984] avec [Benois-Sakarovitch 1986]

$$\forall w \in X^*, \quad w(\textcolor{red}{dg} \rightarrow_S^*) = ((w \uparrow \hat{R}^*) \rightarrow_{\textcolor{teal}{D}}^*) \cap X^*$$

Systèmes de bas-en-haut

Théorème (Brainerd 1969)

Soit S une partie finie de $T(X) \times T(X)$ et L est une partie rationnelle de $T(X)$. Alors

$$[L](\rightarrow_S^*)$$

est rationnel.

Théorème (Durand-Sénizergues, JSC 2015)

Soit S une partie finie de $T(X, V) \times T(X, V)$ et L est une partie rationnelle de $T(X)$. Alors

$$[L](\textcolor{red}{bh} \rightarrow_S^*)$$

est rationnel.

Termes de piles

Termes de piles d'ordre supérieur :

arbres binaires, ordonnés, étiquetés par des piles d'ordre supérieur.
notation : $T(P_n(X))$

Règles de réécriture close :

compositions d'opérations de

- * **remplacement** d'un terme clos par un autre
- * **opération (unaire)** sur les piles [copie, anti-copie, $rew_{x,y}$]

Termes de piles

Théorème (Penelle, TOCS 2017)

Soit S un ensemble *reconnaissable* de règles de réécriture close sur les piles d'ordre supérieur; soit L est une partie *reconnaissable* de $T(P_n(X))$. Alors

$$[L](\rightarrow_S^*)$$

est *reconnaissable*.

Termes de piles

Preuve du théorème :

- membre gauche d'une opération de remplacement de termes \mapsto **anti-terme**
- compositions d'opérations \mapsto **graphes** planaires acycliques (ensemble HR \mathcal{D}_n^*)
- extension du théorème de [Benois, CRAS 1969] :
si R est une partie **reconnaissable** de \mathcal{D}_n^* alors l'ensemble des graphes "réduits" (i.e. anti-termes suivis de termes), est **reconnaissable**.

Réécriture vs Groupes

Groupes virtuellement libres

[M. Nivat : Congruences de Thue et t-Langages. Studia
Scientiarum Mathematicarum Hungarica 6 (1971) p. 243-249]

Groupes virtuellement libres

S. NIVAT

Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 6 (1971) 243–249.

CONGRUENCES DE THUE ET t -LANGAGES

par

M. NIVAT

Résumé: On introduit la classe des t -langages, sous-classe de celle des langages de Chomsky. Tout t -langage est susceptible d'une définition algébrique, et possède de l'image homomorphe inverse d'un élément d'un groupe libre et d'une définition combinatoire au moyen d'une congruence de Thue que l'on construit explicitement à partir de la définition algébrique. Il en résulte la décidabilité du problème de l'équivalence de deux t -langages. La première partie de cet article contient un lemme combinatoire qui est à la base de nos résultats.

I — Un lemme combinatoire

Soit $Z = \{y_i^{\pm} | i = 1, \dots, n, \pm = \pm 1\}$ un alphabet fini. Il est classique de considérer l'application ϱ de Z^* (monotope libre engendré par Z) dans Z^* définie par $\varrho(y) = e$ (e désigne le mot vide dans ce qui suit).

Pour tout $f \in Z^*, \varrho(fy) = \varrho(f)y$ si $\varrho(f) \in Z^*y^*$,
 $= f_1 \quad \quad \quad$ si $\varrho(f) = f_1y^*$.

La relation d'équivalence \equiv définie par $f \varrho \equiv g \varrho$ si $\varrho(f) = \varrho(g)$ est une congruence sur Z^* . Le quotient de Z^* par ϱ n'est autre que le groupe libre à n générateurs. Nous utiliserons dans ce travail toutes les propriétés de ϱ (voir par exemple MAGNUS, KARASS et SOLITAR [1]).

Nous noterons $|f|$ la longueur du mot f et si $f = y_1^{s_1} y_2^{s_2} \dots y_n^{s_n}$, nous désignons par f^{-1} le mot $f^{-1} = y_1^{-s_1} y_2^{-s_2} \dots y_n^{-s_n}$.

Le lemme essentiel dans ce travail est le suivant.

LEMME 1. Soient f_1, \dots, f_p des mots de Z^* satisfaisant à $f_1 \varrho \equiv f_2 \varrho \equiv \dots \equiv f_p \varrho$. Il existe un entier i , $1 \leq i \leq p$ tel que

$$|\varrho(f_i f_{i+1})| \leq \max_{i=1, \dots, p} |\varrho(f_i)|.$$

DÉMONSTRATION. Si pour tout $i = 1, \dots, p$ $\varrho(f_i) = e$ le lemme est trivialement vérifié. Sinon il existe certainement un entier j , $1 \leq j \leq p$, tel que

$$|\varrho(f_j \dots f_p)| > 0.$$

Comme $|\varrho(f_1, \dots, f_p)| = 0$ il existe un entier l , $1 \leq l < p$ tel que

$$|\varrho(f_1 \dots f_{l-1})| \equiv |\varrho(f_1 \dots f_l)|$$

$$|\varrho(f_1 \dots f_l)| > |\varrho(f_1 \dots f_{l-1})|.$$

Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 6 (1971)

Groupes virtuellement libres

Soit Q une partie d'un groupe G , avec $1 \in Q$. La partie Q est dite **primaire** ssi, pour tout $n \geq 2$ et toute suite q_1, \dots, q_n, q d'éléments de Q , si

$$q_1 \cdot q_2 \cdots q_n = q$$

alors,

$$\exists i \in [1, n-1], \quad q_i \cdot q_{i+1} \in Q.$$

Lemme (Nivat 1971)

Soit G un groupe libre de base X . Alors, pour tout $k \geq 1$,

$$Q := (X \cup \bar{X})^{\leq k}$$

est une partie génératrice **primaire** de G .

Groupes virtuellement libres

Théorème

Soit G un groupe de type fini. G est *virtuellement libre* ssi il vérifie l'une des conditions suivantes :

- 1- G a une partie génératrice finie Q qui est *primaire*
- 2- $G = X^*/S$ pour un système S fini, *confluent sur ε* et S est *monadique*
- 3- $G = X^*/S$ pour un système S fini, *quasi-parfait*
- 4- $G = X^*/S$ pour un système S fini, *géodesique*

Références :

- 1,2 : [Autebert-Boasson-Sénizergues, 1985]
- 3 : [Rimlinger, 1987]
- 4 : [Duncan-Diekert-Myasnikov, 2010]

Groupes hyperboliques

Un groupe G est **mot-hyperbolique** ssi :

$\exists \delta > 0$, tout triangle géodésique est δ -mince[Gromov, 1987].

Théorème (Alonso et alii, 1991)

G est mot-hyperbolique ssi G est présentable par un système S confluent sur ε .

Réécriture vs linguistique computationnelle

Calcul de Lambek

[J. Lambek : The mathematics of sentence structure ; American Mathematical Monthly, 1958, p.154-170]

Ensemble de connecteurs : $\mathcal{C} = \{\backslash, /\}$,

Ensemble de variables propositionnelles : \mathcal{P}

Formules : $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$

Les séquents :

$$F_1, F_2, \dots, F_n \vdash G$$

où $n \geq 1$ et F_1, F_2, \dots, F_n, G sont des formules.

Calcul de Lambek

Axiome : pour toute formule F

$$F \vdash F$$

Règles de déduction :

introduction à gauche
$$\frac{F, \Delta \vdash G}{\Delta \vdash F \setminus G}$$

introduction à droite
$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash G/F}$$

élimination à gauche
$$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Delta \vdash F \setminus G}{\Gamma, \Delta \vdash G}$$

élimination à droite
$$\frac{\Gamma \vdash G/F \quad \Delta \vdash F}{\Gamma, \Delta \vdash G}$$

où Γ, Δ sont des listes non-vides de formules et F, G sont des formules.

Grammaire catégorielle

Grammaire de Lambek :

Types atomiques : $\mathcal{P} = \{S, sn, n, \dots\}$

(Sentence, syntagme nominal, nom, ...)

Lexique : $\text{Lex} : X \rightarrow 2^{\mathcal{P}}$

Langage : $x_1 x_2 \dots x_n \in L$ ssi

$$\exists \vec{t} \in \prod_{i=1}^n \text{Lex}(x_i), \quad t_1, t_2, \dots, t_n \vdash S$$

Théorème de Pentus

Théorème (Pentus LICS, 1993)

*Les grammaires **algébriques** et les grammaires de Lambek engendrent les **mêmes** langages.*

Résout positivement une conjecture de [Chomsky, 1963].

Preuve de [Moot-Rétoré, The logic of categorial grammars, 2012], chapitre 2 :

⋮

paragraphe 2.11.2 : “Lemme combinatoire” de [Nivat 1971],

⋮

Idée : le **groupe libre** est un **modèle** du calcul de Lambek.