

Systèmes déductifs

Traduction de Kolmogorov

Exercice 1.1 Préparation

Donner une preuve en DN Intuitionniste des séquents :

$$S1 : \vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$S2 : \vdash \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$$

$$S3 : A, \neg\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg B$$

$$S4 : \neg\neg(A \wedge B) \vdash \neg\neg A$$

$$S5 : A, B \vdash \neg\neg(A \wedge B)$$

$$S6 : \neg\neg(A \vee B), A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash \neg\neg C$$

$$S7 : \vdash \neg\neg\forall x\neg P(x) \leftrightarrow \forall x\neg P(x)$$

$$S8 : \neg\neg\exists P(x), \forall x P(x) \rightarrow Q \vdash \neg\neg Q, \text{ si } x \notin FV(Q)$$

$$S9 : \vdash \perp \leftrightarrow \neg\neg\perp.$$

Exercice 1.2 Traduction

On considère l'application $I : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$ définie inductivement par : pour toutes formules $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}_1$

$$I(\Phi) = \neg\neg\Phi \text{ si } \Phi \text{ est atomique} \quad (1)$$

$$I(\Phi \vee \Psi) = \neg\neg(I(\Phi) \vee I(\Psi)) \quad (2)$$

$$I(\Phi \wedge \Psi) = \neg\neg(I(\Phi) \wedge I(\Psi)) \quad (3)$$

$$I(\Phi \rightarrow \Psi) = \neg\neg(I(\Phi) \rightarrow I(\Psi)) \quad (4)$$

$$I(\forall x\Phi) = \neg\neg(\forall xI(\Phi)) \quad (5)$$

$$I(\exists x\Phi) = \neg\neg(\exists xI(\Phi)) \quad (6)$$

$$I(\neg\Phi) = \neg I(\Phi) \quad (7)$$

Dans ce qui suit, on dénote par $\vdash_c \Phi$ (resp. $\vdash_i \Phi$) le fait que le séquent $\vdash \Phi$ est démontrable en Dédution Naturelle Classique (resp. Intuitionniste).

On considère une formule quelconque $\Phi \in \mathcal{L}_1$.

1- Montrer que $\vdash_c \Phi \leftrightarrow I(\Phi)$

2- Montrer que, si $\vdash_c \Phi$ alors $\vdash_i I(\Phi)$

Exercice 1.3 Corollaire

Montrer que \perp est démontrable dans le système DN si et seulement si il est démontrable dans le système DNI.