

Systèmes déductifs

Dédution naturelle

1 Calcul propositionnel

Exercice 1.1 DNI

Donner une preuve en DN Intuitionniste des formules :

- $\vdash (B \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg B$
- $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- $\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
- $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$
- $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$
- $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Exercice 1.2 DN

Donner une preuve en DN classique des formules :

- $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$
- $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Exercice 1.3

Soient $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathcal{L}_1, P \in \mathcal{L}_1$. Montrer que, si $\Gamma \vdash P$ est prouvable dans DN (resp. DNI) alors $\Gamma \cup \Gamma' \vdash P$ est prouvable dans DN (resp. DNI).

2 Calcul des prédicats

Exercice 1.4 DNI

Donner une preuve en DN Intuitionniste des formules :

- $\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \forall z (P(z) \wedge Q(z))$
- $\vdash (\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \rightarrow \exists z (P(z) \wedge Q(z))$
- $\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$
- $\vdash \exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x)$
- $\vdash \exists x \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x P(x)$

Exercice 1.5 DN

Donner une preuve en DN classique des formules :

- $\vdash \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
- $\vdash [\forall x (R \vee R'(x))] \rightarrow [R \vee \forall x R'(x)]$

3 Modèles de Kripke

Exercice 1.6

1- Pour chacun des séquents démontrés en DN classique dans les exercices précédents, examiner si ce séquent est démontrable en DN intuitionniste. Dans chaque cas on fournira soit une preuve intuitionniste, soit une structure de Kripke qui réfute le séquent.

2- Répondre à la même question, pour les formules :

$$\vdash \neg \forall x \neg P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$$\vdash \neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$$

Exercice 1.7

Montrer, par des arguments sémantiques, que $\Vdash \forall x \neg \neg (P(x) \vee \neg P(x))$.

Que peut-on dire de : $\Vdash \neg \neg \forall x (P(x) \vee \neg P(x))$?