

LOGIQUE, IN7M12
 Examen du 16/12/2011

Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.
 Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera $\min\{exo5 + exo6 + exo7 + exo8, 10\}$.

Exercice 5 (3 pts /10)

Parmi les quatre règles suivantes, lesquelles sont des règles dérivées du système LK ? :

$$\frac{\Gamma \vdash A, B \quad A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{R1}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B \quad A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{R2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \quad A, B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{R3}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2 \vdash B \quad A, B \vdash \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta} \text{R4}$$

(on justifiera précisément chaque réponse).

Exercice 6 (3 pts /10)

Pour chacun des séquents S_i suivants ($1 \leq i \leq 3$), déterminer si S_i est prouvable dans LJ.

$$S_1 : A \rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B \quad S_2 : \neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$S_3 : \vdash \forall x \forall y [\neg(P(x) \vee Q(y))] \rightarrow [(\neg P(x)) \wedge (\neg Q(y))]$$

Aide : pour traiter S_1 on pourra construire une structure de Kripke possédant deux noeuds $k_0 \leq k_1$ et telle que $\Vdash_0 = \{(k_1, A), (k_1, B)\}$.

Exercice 7 (3 pts /10)

1- Montrer que, pour toute formule du premier ordre A :

$$\neg\neg\neg A \vdash_{\text{LJ}} \neg A$$

2- Est-il vrai que

$$\neg\neg\perp \vdash_{\text{LJ}} \perp?$$

3- Montrer que, pour toute formule atomique A , si $A \neq \perp$ alors le séquent

$$\neg\neg A \vdash A$$

n'est pas prouvable dans LJ.

Exercice 8 (3 pts /10)

On considère dans cet exercice la signature \mathcal{S} formée du symbole de prédicat $=$ (symbole de l'égalité, d'arité 2), d'un symbole de fonction $*$ (symbole d'opération binaire, d'arité 2) et d'un symbole de constante e (d'arité 0). On rappelle les théories (i.e. ensembles de formules) suivantes :

EG (Théorie de l'égalité)

REF : $\forall x \ x = x$

SYM : $\forall x \forall y \ (x = y \rightarrow y = x)$

TRANS : $\forall x \forall y \forall z \ (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

COMPF : $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \ (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2) \rightarrow x_1 * x_2 = y_1 * y_2$

MO (Théorie des monoïdes)

Tous les axiomes ci-dessus de EG ;

ASS : $\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z$

NE : $\forall x \ (x * e = x \ \wedge \ e * x = x)$

1- Montrer que la règle suivante est une règle dérivée de LK :

$$\frac{\text{MO} \vdash x_1 = y_1 * (y_2 * y_3)}{\text{MO} \vdash x_1 = (y_1 * y_2) * y_3} \text{AS}$$

(où x_1, y_1, y_2, y_3 sont des variables).

2- La règle suivante est-elle une règle dérivée de LK ? :

$$\frac{\text{MO} \vdash x_1 = y_1 * y_2}{\text{MO} \vdash x_1 = y_2 * y_1} \text{COM}$$

Aide : on remarquera que $\{a, b\}^*$ (l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$), muni du produit de concaténation et de l'élément neutre ε , est un monoïde, donc une structure particulière \mathcal{A} telle que $\mathcal{A} \models \text{MO}$.