Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2009/2010

LOGIQUE, INF 462

Examen du 18/12/2009
Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 4 (2 pts /10)
Le professeur Cosinus pense avoir écrit une preuve dans LK :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\texttt{ax}$}
\UnaryInfC{$P(x) \vdash P(x)$}
\RightLabel{$\texttt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$P(x), Q(x) \vdash P(x)$}
\RightLabel{$\wedge_g$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)$}
\RightLabel{$\forall_d$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge Q(x) \vdash \forall x P(x)$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\texttt{ax}$}
\UnaryInfC{$Q(x) \vdash Q(x)$}
\RightLabel{$\texttt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$P(x), Q(x) \vdash Q(x)$}
\RightLabel{$\wedge_g$}
\UnaryInfC{$P(x) \wedge Q(x) \vdash Q(x)$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash Q(x)$}
\RightLabel{$\forall_d$}
\UnaryInfC{$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$}
\end{prooftree}
$$

1- Critiquer chaque étape de la preuve de Cosinus.
2- Le séquent $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ est-il prouvable dans LK ?

Exercice 5 (2,5 pts /10)
Pour chacun des séquents S_i suivants ($1 \leq i \leq 3$), déterminer si S_i est prouvable dans LJ.

$$
\begin{array}{llll}
S_1 : & \vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (\neg\neg B \vee \neg A) & S_2 : & \vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \vee B) \\
S_3 : & \neg \forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x). & &
\end{array}
$$

Aide : pour traiter S_3 on pourra construire une structure de Kripke possédant deux noeuds $0 \leq 1$ et telle que $D(0) = \{a\}, D(1) = \{a, b\}$.

Exercice 6 (3 pts /10)
On considère l'ensemble d'entiers $E := \{2x + 3y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$.
1- Vérifier que $0 \in E, 1 \in \mathbb{N} - E, 2 \in E, 3 \in E, 4 \in E, 5 \in E$. Montrer que $\mathbb{N} - E$ est un ensemble fini (que l'on calculera).
On rappelle que l'application $\nu : \{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ associe à tout mot $u \in \{0,1\}^*$ le nombre qu'il représente i.e. $\nu(u[\ell - 1] \cdot u[k] \ldots u[0]) = \sum_{k=0}^{\ell-1} 2^k u[k]$ pour $\ell \geq 1$ et $\nu(\varepsilon) = 0$.
2- Construire un automate fini $\mathcal{A}$, qui reconnait $\{u \in \{0,1\}^* \mid \nu(u) \in E\}$.
(bien préciser si cet automate fonctionne de droite à gauche ou de gauche à droite).
3- Construire un automate fini $\mathcal{B}$, qui reconnait $\{0,1\}^* - \mathrm{L}(\mathcal{A})$.
Le langage $\mathrm{L}(\mathcal{B})$ est-il fini ? le langage $\mathrm{L}(\mathcal{B}) \cap (1 \cdot \{0,1\}^* \cup \{\varepsilon\})$ est-il fini ?
On considère maintenant l'ensemble d'entiers

$$E' := \{31x + 52y \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}.$$

3- Comment peut-on construire, en principe, un automate fini $\mathcal{A}'$, qui reconnait $\{u \in \{0,1\}^* \mid \nu(u) \in E'\}$?
N.B. On *ne* demande *pas* de construire explicitement cet automate $\mathcal{A}'$.

4- On se demande si E' est presqu'égal à $\mathbb{N}$ i.e. si $\mathbb{N} - E'$ est un ensemble fini. Comment peut-on résoudre ce problème en utilisant l'automate $\mathcal{A}'$?

5- Peut-on exprimer le fait que $\mathbb{N} - E'$ est un ensemble fini par une formule du premier ordre sur la signature $\{+, =\}$?

Exercice 7 (2,5 pts /10)

On considère l'ensemble **EG** des axiomes de l'égalité sur une signature comprenant un symbole de fonction binaire $*$ et le symbole d'égalité :

REF : $\forall x \;\; x = x$

SYM : $\forall x, y \;\; (x = y \to y = x)$

TRANS : $\forall x, y, z \;\; (x = y \wedge y = z) \to x = z)$

COMPF : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \;\; (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \to (x_1 * y_1 = x_2 * y_2)$

On rappelle que l'ensemble **MO** des axiomes des monoïdes est l'union de l'ensemble des quatre axiomes de **EG** (ci-dessus) avec les deux axiomes :

ASS : $\forall x, y, z \;\; x * (y * z) = (x * y) * z$

NE : $\forall x \;\; (x * e = x \;\; \wedge \;\; e * x = x)$

ici e est une constante d'arité 0 ; l'axiome **NE** exprime que e est un élément neutre pour la loi $*$.

On se place sur la signature $\mathcal{S} : \langle\{=\}; \{*, a, b, c, d, e\}\rangle$ où les symboles a, b, c, d sont des symboles de constantes et $=, *, e$ sont les symboles mentionnés plus haut.

1- Prouver, en utilisant la syntaxe usuelle des preuves mathématiques, que dans tout monoïde on a :

$$(a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d)$$

Justifier chaque étape de cette preuve par un axiome de **MO**.

2- Donner une preuve dans LJ de :

$$\mathbf{MO} \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d)$$

Aide : il suffit de formaliser la preuve informelle donnée à la question 1.