

## LOGIQUE

### TD 4 : Arithmétique de Presburger

#### Exercice 4.1 Construction d'automates

1- Ecrire un automate fini reconnaissant chacun des langages suivants :

$$\nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x = y\}); \quad \nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\})$$

2- Soit  $\alpha \in \mathbb{N}$  un entier fixé. Décrire un automate fini reconnaissant

$$\nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha x = y\})$$

#### Exercice 4.2 Equations linéaires

On considère le système d'équations (et inéquations) en nombres entiers :

$$2x + y = z, x \leq y$$

1- Comment décrire l'ensemble de ses solutions au moyen d'un automate fini ?

2- Supposons que l'on veuille résoudre un système d'équations et inéquations sur  $\mathbb{N}$  en utilisant la théorie des automates.

2.1 en combien de temps peut-on décider l'existence de solutions ?

2.2 majorer la taille minimale d'une solution, s'il en existe.

#### Exercice 4.3 Langage des carrés

On considère le prédicat  $C(x)$  défini par :

$$C(n) \Leftrightarrow \exists y, x = y \times y$$

1- Montrer que le prédicat  $x \times y = z$  est définissable dans le langage  $\mathcal{L}_1(+, =, C)$ .

2- En déduire que la théorie du premier ordre de  $\langle \mathbb{N}, +, =, C \rangle$  est indécidable.

3- Montrer que le langage

$$\{u \in \Sigma_2^* \mid \nu(u) \text{ est un carré} \}$$

n'est pas rationnel.

#### Exercice 4.4 Entiers relatifs

Montrer que la théorie du premier ordre de

$$\langle \mathbb{Z}, +, 0, 1, \leq, = \rangle$$

est décidable.

#### Exercice 4.5 Arithmétique de Skolem

Montrer, en vous appuyant sur les propriétés de clôture et de décidabilité des automates finis de termes, que la théorie du premier ordre de

$$\langle \mathbb{N}, \times, = \rangle$$

est décidable.

**Exercice 4.6** Logique sur les mots

1- Montrer, en vous appuyant sur les propriétés de clôture et de décidabilité des automates finis de mots, que la théorie du premier ordre de

$$\langle X^*, \approx, \preceq, (S_x)_{x \in X} \rangle$$

[où  $u \approx v$  signifie  $|u| = |v|$ ,  $\preceq$  dénote l'ordre préfixe et  $u = S_x(v)$  signifie  $u = v \cdot x$ ] est décidable.

2- Tout langage rationnel de  $X^*$  est-il définissable dans cette logique?

**Exercice 4.7** Logique sur le monoïde libre

Montrer, en vous appuyant sur l'indécidabilité du PCP, que la théorie du premier ordre de

$$\langle \{a, b, c\}^*, a, b, c, \cdot, = \rangle$$

est indécidable.