

LOGIQUE

TD 3 : Structures de Kripke

Exercice 3.1

Donner une preuve sémantique de $\Vdash \forall x \neg \neg (R(x) \vee \neg R(x))$

Exercice 3.2

1- Trouver une structure de Kripke \mathcal{K} qui est un contre-modèle de

$$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$$

2- Le séquent $\vdash (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ est-il prouvable dans LK ? dans LJ ?

Exercice 3.3 LJ versus LK

On considère les séquents suivants qui sont prouvables dans LK (voir la feuille 1). Déterminer pour chacun d'eux s'il est prouvable dans LJ.

1- $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

2- $\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$

3- $\vdash \neg \forall x \neg R(x) \rightarrow \exists x R(x)$

4- $\vdash \exists x \forall y (R(y) \rightarrow R(x))$

5- $\forall x \neg R(x) \vdash \neg \exists x R(x)$

6- $\vdash \exists x (R(a) \vee R(b)) \rightarrow R(x)$.

Exercice 3.4 Bisimulations

Soient $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ des structures de Kripke sur une signature propositionnelle $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$.

On note $\mathcal{K}_i = (K_i, \leq_i, \Vdash_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. Une relation $R \subseteq K_1 \times K_2$ est une *bisimulation* ssi elle vérifie les trois propriétés B1, B2, B3 suivantes :

(B1) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall Q \in \mathcal{Q}, k_1 \Vdash Q \Leftrightarrow k_2 \Vdash Q$

(B2) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall k'_2 \in K_2$ tel que $k_2 \leq_2 k'_2$,

$$\exists k'_1 \in K_1 \text{ tel que } (k'_1, k'_2) \in R \text{ \& } k_1 \leq_1 k'_1.$$

(B3) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall k'_1 \in K_1$ tel que $k_1 \leq_1 k'_1$

$$\exists k'_2 \in K_2 \text{ tel que } (k'_1, k'_2) \in R \text{ \& } k_2 \leq_2 k'_2.$$

1- Montrer que si R est une bisimulation alors, pour tout $(k_1, k_2) \in R$ et pour toute formule A ,

$$k_1 \Vdash_1 A \Leftrightarrow k_2 \Vdash_2 A.$$

2- Montrer que toute structure de Kripke possédant un plus petit élément est bisimilaire à un arbre.

Exercice 3.5 Une structure complète

Soit $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ une structure de Kripke sur la signature propositionnelle \mathcal{Q} et A une formule sur \mathcal{Q} . On note $SF(A)$ l'ensemble des sous-formules de A . Pour tout $k \in K$ on note $S(k) := \{B \in SF(A) \mid k \Vdash B\}$. On définit une structure de Kripke $\mathcal{K}^* = (K^*, \leq^*, \Vdash^*)$ par :

$$K^* := \{S(k) \mid k \in K\}, \quad S(k) \leq^* S(k') \Leftrightarrow S(k) \subseteq S(k')$$

et pour tout $Q \in \mathcal{Q}$

$$S(k) \Vdash^* Q \Leftrightarrow Q \in S(k).$$

1- Montrer que, pour tout $B \in SF(A)$ et tout $k \in K$,

$$k \Vdash B \Leftrightarrow S(k) \Vdash^* B$$

2- En déduire une méthode sémantique permettant de tester, pour toute formule propositionnelle A si $\Vdash A$.

3- Montrer que, pour toute formule propositionnelle A , $\vdash_{LJ} A$ ssi toute structure de Kripke finie \mathcal{K} réalise A .

4- En utilisant l'exercice 3.4, montrer que, pour toute formule propositionnelle A , $\vdash_{LJ} A$ ssi toute structure de Kripke \mathcal{K} qui est un arbre fini réalise A .

5- Construire une structure de Kripke propositionnelle \mathcal{K} sur \mathcal{Q} , qui est un arbre dénombrable et telle que, pour toute formule propositionnelle A sur \mathcal{Q} ,

$$\vdash_{LJ} A \Leftrightarrow \mathcal{K} \Vdash A.$$