Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2012/2013

LOGIQUE, IN7M12

Devoir surveillé du 12/10/2012

Tous documents autorisés ; durée : 1h 30.
Les exercices sont indépendants. Le barême est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (6 pts)
1- Donner une preuve dans NK des séquents :

$$(A \to B) \land (B \to C) \vdash A \to C$$

$$\exists x \neg P(x) \vdash \neg(\forall y P(y))$$

2- Parmi ces deux séquents, lesquels sont prouvables dans NJ ?

Exercice 2 (6 pts)
1- Donner une preuve dans LK des séquents :

$$(\neg A) \to (B \lor C) \vdash A \lor ((\neg B) \to C)$$

$$(\neg A) \to \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (A \lor Q(x))$$

2- Donner une preuve dans LJ du séquent :

$$A \lor \exists x\, Q(x) \vdash \exists x\, (A \lor Q(x))$$

Exercice 3 (8 pts)
On rappelle le schéma de règle mix :

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma'_A \vdash \Delta_A, \Delta'}$$

où A est une formule, $\Gamma' = \Gamma'_A + nA$ (pour un entier $n \in \mathbb{N}$) et $\Delta = \Delta_A + mA$ (pour un entier $m \in \mathbb{N}$).
On rappelle que le rang d'un mix de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta}\,\texttt{R1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma' \vdash \Delta'}\,\texttt{R2}}{\Gamma, \Gamma'_A \vdash \Delta_A, \Delta'}\,\texttt{mix}$$

est le couple d'entiers

$$(|A|, |\pi_1| + |\pi_2|),$$

Précisions : sur ce schéma, la preuve π_1 (resp. π_2) se termine par le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ (resp. $\Gamma' \vdash \Delta'$) : en particulier, le noeud qui correspond à l' application de la règle R1 (resp. R2)

fait partie de π_1 (resp. π_2).
1- Toute règle de coupure est-elle une règle mix ?
2- Toute règle mix est-elle une règle de coupure ?
3- On considère la transformation de preuve ci-dessous. Partant de la preuve

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{1,1}\\ \vdots\\ \Gamma \vdash B,\Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{1,2}\\ \vdots\\ \Gamma\vdash C,\Delta\end{matrix}}{\Gamma\vdash B\wedge C,\Delta}\wedge_d \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma'\vdash\Delta'}\texttt{R2}}{\Gamma,\Gamma'_A\vdash B\wedge C,\Delta_A,\Delta'}\texttt{mix}$$

où $\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \pi_2$ sont des preuves normales (i.e. sans mix), on construit la preuve normale :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{1,1}\\ \vdots\\ \Gamma \vdash B,\Delta\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma'\vdash\Delta'}\texttt{R2}}{\Gamma,\Gamma'_A\vdash B,\Delta_A,\Delta'}\texttt{mix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_{1,2}\\ \vdots\\ \Gamma \vdash C,\Delta\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma'\vdash\Delta'}\texttt{R2}}{\Gamma,\Gamma'_A\vdash C,\Delta_A,\Delta'}\texttt{mix}}{\Gamma,\Gamma'_A\vdash B\wedge C,\Delta_A,\Delta'}\wedge_d$$

3.1 Vérifier que rang du mix de la première preuve vaut

$$(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1).$$

3.2 Que valent les rangs de chacun des deux mix de la seconde preuve ?
3.3 Sont-ils *strictement* inférieurs à $(|A|, |\pi_{1,1}| + |\pi_{1,2}| + |\pi_2| + 1)$?
4- On considère une preuve π de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_{1,1}\\ \vdots\\ \Gamma, B \vdash \Delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\pi_{1,2}\\ \vdots\\ \Gamma, C\vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma, B\vee C\vdash \Delta}\vee_g \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\Gamma'\vdash\Delta'}\texttt{R2}}{\Gamma,\Gamma'_A, B\vee C\vdash \Delta_A,\Delta'}\texttt{mix}$$

où $\pi_{1,1}, \pi_{1,2}, \pi_2$ sont des preuves normales.
Construire une preuve *normale* $\hat{\pi}$ qui a la même conclusion que π.