Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2013/2014

LOGIQUE

TD0 : Déduction naturelle

Calcul propositionnel
Exercice 0.1DNI
Donner une preuve en DN Intuitionniste des formules :
$\vdash (B \to \bot) \leftrightarrow \neg B$
$\vdash A \to \neg\neg A$
$\vdash \neg\neg\neg A \to \neg A$
$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$
$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$
$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Exercice 0.2DN
Donner une preuve en DN classique des formules :
$\vdash \neg\neg A \to A$
$\vdash A \vee \neg A$
$\vdash \neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$
$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Exercice 0.3 Numérotation de De Bruijn
Soit Φ une formule du premier ordre et p une feuille de l'arbre planaire $P(\Phi)$ qui représente cette formule. Si p est étiqutée par une variable $v \in \mathcal{V}$, alors on définit son *numéro de De Bruijn* par :

$$\begin{aligned} N(p) &:= -1 \text{ si } v \text{ est libre en } p \\ N(p) &:= \mathrm{Card}\{\mathrm{q} \in \mathrm{Dom}(\mathrm{P}(\Phi)) \mid \mathrm{r} \prec \mathrm{q} \prec \mathrm{p}, \mathrm{P}(\Phi)(\mathrm{q}) \in \mathcal{QV}, \mathrm{P}(\Phi)(\mathrm{q}) \notin \mathcal{Q}\{\mathrm{v}\}\} \\ &\quad\ \text{si } P(\Phi)(r) \in \mathcal{Q}\{v\} \text{ et } \forall q, (r \prec q \prec p \Rightarrow P(\Phi)(q) \notin \mathcal{Q}\{v\}). \end{aligned}$$

Autrement dit : $N(p)$ est le numéro de la première quantification de la variable v, en "remontant" dans l'arbre depuis p vers la racine. On définit alors l'arbre planaire $\mathrm{DB}(\Phi)$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Dom}(\mathrm{DB}(\Phi)) := & \mathrm{Dom}(\mathrm{P}(\Phi)) & \\ \mathrm{DB}(\Phi)(p) := & (P(\Phi))(p) & \text{si } (P(\Phi))(p) \text{ est un connecteur ou un symbole de la signature} \\ \mathrm{DB}(\Phi)(p) := & Q & \text{si } (P(\Phi))(p) \in Q\mathcal{V} \text{ où } Q \text{ est un quantificateur} \\ \mathrm{DB}(\Phi)(p) := & N(p) & \text{si } (P(\Phi))(p) \in \mathcal{V} \text{ et } N(p) \geq 0 \\ \mathrm{DB}(\Phi)(p) := & v & \text{si } (P(\Phi))(p) \in \mathcal{V} \text{ et } N(p) = -1 \end{array}$$

1- Montrer que, si Φ, Φ' sont des formules du premier ordre, $\Phi \equiv_\alpha \Phi'$ si et seulement si $\mathrm{DB}(\Phi) = \mathrm{DB}(\Phi')$.

2- Montrer que $\Phi \mapsto \mathrm{DB}(\Phi)$ peut être calculée en temps linéaire.
3- Donner un algorithme qui prend en entrée un triplet (Φ, v, t) où Φ est une formule du premier ordre, v est une variable et t est un terme et calcule un représentant de $\Phi[v := t]$.
4- Décrire une méthode algorithmique permettant, étant donnée une formule du premier ordre Ψ de calculer toutes les formules Φ, à α-équivalence près, telles qu'il existe une variable v et un terme t tels que

$$\Phi[v := t] \equiv_\alpha \Psi.$$

Exercice 0.4 variables liées plusieurs fois
Le théorème des quatre carrés affirme que : tout entier naturel peut s' écrire comme somme de quatre carrés. Dans un langage formalisé sur une signature $\mathcal{S} = \{E; P, M\}$ ce théorème est exprimé par :

$$\forall x \cdot \exists y_1 \cdot \exists y_2 \cdot \exists y_3 \cdot \exists y_4 \cdot E(x, P(M(y_1, y_1), P(M(y_2, y_2), P(M(y_3, y_3), M(y_4, y_4)))))$$

Pourriez-vous exprimer le même théorème par une formule qui ne comporte que *trois* variables ?

Exercice 0.5
Que pensez-vous des preuves suivantes ?
π_1 :
$1 - P(x) \vdash P(x) \quad$ (axiome)
$2 - P(x) \vdash \forall x \cdot P(x) \quad (1, \forall_{\text{intro}})$
$3 - P(x) \vdash P(y) \quad (2, \forall_{\text{elim}})$
$4 - \vdash P(x) \to P(y) \quad (3, \to_{\text{elim}})$
$5 - \vdash \forall y \;\; P(x) \to P(y) \quad (4, \forall_{\text{intro}})$
$6 - \vdash \forall x \;\; \forall y \;\; P(x) \to P(y) \quad (5, \forall_{\text{intro}})$
π_2 :
$1 - \forall z \cdot z = z \vdash \forall z \cdot z = z \quad$ (axiome)
$2 - \forall z \cdot z = z \vdash x = x \quad (1, \forall_{\text{elim}})$
$3 - \forall z \cdot z = z \vdash \exists y \cdot x = y \quad (2, \forall_{\text{intro}})$
$4 - \forall z \cdot z = z \vdash \forall x \cdot \exists y \cdot x = y \quad (3, \forall_{\text{intro}})$
$5 - \forall z \cdot z = z \vdash \exists y \cdot S(y) = y \quad (4, \forall_{\text{elim}})$

Exercice 0.6DNI
Donner une preuve en DN Intuitionniste des formules :
$\vdash (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \to \forall z (P(z) \wedge Q(z))$
$\vdash (\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)) \to \exists z (P(z) \wedge Q(z))$
$\vdash \neg \exists x P(x) \leftrightarrow \forall x \neg P(x)$
$\vdash \exists x P(x) \to \neg \forall x \neg P(x)$
$\vdash \exists x \neg P(x) \to \neg \forall x P(x)$

Exercice 0.7DN
Donner une preuve en DN classique des formules :
$\vdash [\neg \forall x \cdot \neg P(x)] \to [\exists x \cdot P(x)]$
$\vdash [\forall x \cdot (R \vee R'(x))] \to [R \vee \forall x \cdot R'(x)]$