Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2013/2014

LOGIQUE

TD 1 : Calcul des séquents

Symétries du système LK

Exercice 1.1 Réversibilité

Une règle d'inférence $\frac{S_1}{S_2}$ d' un système formel $\mathcal{S}$ est dite *réversible* si $\frac{S_2}{S_1}$ est une règle dérivée du système $\mathcal{S}$. Quelles sont les règles réversibles du système LK ?

Exercice 1.2 Dualité

On ajoute le connecteur $\top$ au langage du système LK i.e. l'ensemble des connecteurs $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$, l'ensemble de quantificateurs $\{\forall, \exists\}$, un ensemble dénombrable de symboles de relations $\mathcal{R}$ et un ensemble dénombrable de symboles de fonctions $\mathcal{F}$.
Pour toute formule F bien-formée on définit la formule duale $\mathrm{D}(F)$ par induction structurelle :

$$\mathrm{D}(\bot) := \top, \quad \mathrm{D}(\top) := \bot$$

$$\mathrm{D}(R(t_1, \ldots, t_k)) := R(t_1, \ldots, t_k) \quad \text{pour tout } R \in \mathcal{R}$$

$$\mathrm{D}(F \wedge G) := \mathrm{D}(F) \vee \mathrm{D}(G), \quad \mathrm{D}(F \vee G) := \mathrm{D}(F) \wedge \mathrm{D}(G)$$

$$\mathrm{D}(F \rightarrow G) := \neg(\mathrm{D}(G) \rightarrow \mathrm{D}(F)), \quad \mathrm{D}(\neg F) := \neg \mathrm{D}(F)$$

$$\mathrm{D}(\forall x F) := \exists x \mathrm{D}(F), \quad \mathrm{D}(\exists x F) := \forall x \mathrm{D}(F)$$

1- Montrer que pour toute formule F, dont les sous-formules atomiques sont $A_1, \ldots, A_n$, on a l'équivalence :

$$F(\neg A_1, \ldots, \neg A_n) \models\!\!\mid \neg \mathrm{D}(F)(A_1, \ldots, A_n).$$

On étend naturellement l'application $F \mapsto \mathrm{D}(F)$ aux séquents en posant :

$$\mathrm{D}(F_1, \ldots, F_n \vdash G_1 \ldots, G_m) := \mathrm{D}(G_1), \ldots, \mathrm{D}(G_m) \vdash \mathrm{D}(F_1), \ldots, \mathrm{D}(F_n).$$

2- Montrer que si, pour toute structure $\mathcal{T}$ et toute valuation v on a :

$$(\mathcal{T}, v) \models S_1 \text{ implique } (\mathcal{T}, v) \models S_2$$

alors, pour toute structure $\mathcal{T}$ et toute valuation v on a aussi :

$$(\mathcal{T}, v) \models \mathrm{D}(S_1) \text{ implique } (\mathcal{T}, v) \models \mathrm{D}(S_2).$$

3- Quelles sont les règles $\frac{S_1}{S_2}$ (où S_1 est un séquent ou bien le mot vide, et S_2 est un séquent) de LK telles que $\frac{\mathrm{D}(S_1)}{\mathrm{D}(S_2)}$ est encore une règle ?
4- Ajouter une règle à LK de façon à l'adapter à l'ajout du connecteur $\top$. On voudrait que le séquent $\vdash (\neg\bot \rightarrow \top) \wedge (\top \rightarrow \neg\bot)$ soit prouvable dans cette extension de LK et on souhaite conserver (ou améliorer) les propriétés de symétrie de LK.

Exemples de preuves

Exercice 1.3 LK propositionnel

Donner une preuve dans LK des séquents :

$\vdash A \to (B \to A)$

$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$

Exercice 1.4 LK

Donner une preuve dans LK des séquents :

$\neg\exists x R(x) \vdash \forall x \neg R(x)$

$\neg\forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x)$

$\vdash \forall x(Q \vee R(x)) \to Q \vee \forall x R(x)$

$\vdash \exists x \forall y(R(y) \to R(x))$

Exercice 1.5 LJ propositionnel

Donner une preuve dans LJ des séquents :

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

$A \vdash \neg\neg A$

$\neg\neg\neg A \vdash \neg A$

Exercice 1.6 LJ

1- Que pensez-vous de la "preuve" suivante ?

$$\begin{array}{ll}
R(x) \vdash R(x) & \texttt{ax} \\
\exists x R(x) \vdash R(x) & \exists_g \\
\neg R(x), \exists x R(x) \vdash & \neg_g \\
\forall x \neg R(x), \exists x R(x) \vdash & \forall_g \\
\forall x \neg R(x) \vdash \neg\exists x R(x) & \neg_d
\end{array}$$

2- Le séquent $\forall x \neg R(x) \vdash \neg\exists x R(x)$ est-il prouvable dans LJ ?

Propriétés des preuves

Exercice 1.7 Elimination à droite

On sonsidère la règle suivante (d'élimination à droite) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

(où Γ est un multi-ensemble de formules et A, B sont des formules).

1- Cette règle est-elle dérivable dans LK ?

2- Cette règle est-elle dérivable dans LK privé de la règle de coupure ?

Exercice 1.8 Contractions

On considère le séquent $S := \exists x(R(a) \vee R(b) \to R(x))$.

1- Donner une preuve de S dans LK.

2- Donner une preuve sans coupure de S dans LK.

3- Montrer qu'il n'existe pas de preuve sans coupure ni contraction de S dans LK.