

FIG. 1 – \mathcal{K}_2 .

$$\forall k' \geq 0, \exists k'' \geq k', k'' \Vdash B$$

donc

$$0 \Vdash \neg\neg B$$

donc

$$0 \Vdash \neg\neg B \vee \neg A \tag{1}$$

D'autre part, comme $0 \Vdash A$

$$0 \not\Vdash \neg A$$

et comme, par définition de la relation de forçage \Vdash_0 , $0 \not\Vdash B$, on a

$$0 \not\Vdash \neg A \vee B \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) entraînent que :

$$0 \not\Vdash (\neg\neg B \vee \neg A) \rightarrow (\neg A \vee B) \tag{3}$$

Le séquent S_3 est réfuté par la structure de Kripke suivante :

$$\mathcal{K}_3 := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$$

où $K = \{0, 1\}$, $\leq = \{(0, 0), (1, 1), (0, 1), \}$, $D(0) = \{a\}$, $D(1) = \{a, b\}$ et $\Vdash = \{(1, R(\bar{a}))\}$. (voir la figure 2).

En effet, par définition de \Vdash_0 , le noeud 0 vérifie :

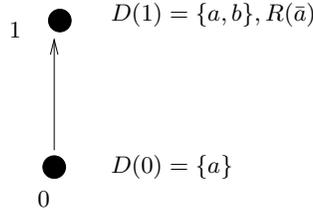


FIG. 2 – \mathcal{K}_3 .

$$0 \not\Vdash R(\bar{a})$$

donc

$$0 \not\models \forall x R(x)$$

donc

$$0 \models \neg \forall x R(x) \tag{4}$$

D' autre part, comme $1 \models R(\bar{a})$, on a

$$0 \not\models R(\bar{a}) \rightarrow \perp$$

i.e.

$$0 \not\models \neg R(\bar{a})$$

Comme a est le seul élément de $D(0)$, on obtient

$$0 \not\models \exists x \neg R(x) \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) montrent que le séquent $\neg \forall x R(x) \vdash \exists x \neg R(x)$ n' est pas valide dans la structure \mathcal{K}_3 .

Exercice 6

1- Soit n un nombre pair : alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2 \cdot x + 3 \cdot 0$, donc $n \in E$.

Soit n un nombre impair, $n \neq 1$: alors il existe $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n = 2 \cdot x + 1$, donc $n = 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot 1$, donc $n \in E$.

Tout nombre de la forme $2x + 3y$ est soit nul (si $x = y = 0$) soit strictement plus grand que 1, (si $x \neq 0$ ou $y \neq 0$). Donc $1 \notin E$.

Finalement : $E = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

En particulier : $0 \in E, 1 \in \mathbb{N} - E, 2 \in E, 3 \in E, 4 \in E, 5 \in E$ et $\mathbb{N} - E$ est un ensemble à un élément, donc un ensemble fini.

2- L'automate fini \mathcal{A} suivant (voir figure 3) reconnaît $\{u \in \{0, 1\}^* \mid \nu(u) \in E\}$. (Cet automate fonctionne de droite à gauche).

3- L' automate fini \mathcal{A} est déterministe et complet. L'automate fini \mathcal{B} , obtenu à partir de \mathcal{A}

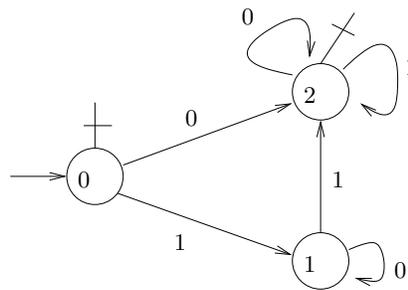


FIG. 3 - \mathcal{A} .

en prenant comme ensemble d'états finaux $Q_B^+ := \{1\}$ reconnaît $\{0, 1\}^* - L(\mathcal{A})$.

Le langage $L(\mathcal{B})$ vaut 0^*1 , qui est infini. Le langage $L(\mathcal{B}) \cap (1 \cdot \{0, 1\}^* \cup \{\varepsilon\})$ vaut $\{1\}$, qui est fini.

3- Notons $t_{31}(x)$ le terme $x + x + \dots + x$ (qui comporte 31 occurrences de la variable x) et $t_{52}(x)$ le terme $x + x + \dots + x$ (qui comporte 52 occurrences de la variable x). L'ensemble E' est défini par la formule $\Phi(n)$ suivante :

$$\exists x. \exists y. n = t_{31}(x) + t_{52}(y)$$

D'après le théorème de Büchi-Bruyere l'ensemble E' est donc 2-reconnaissable i.e. le langage $\{u \in \{0, 1\}^* \mid \nu(u) \in E'\}$ est reconnu par un automate fini \mathcal{A}' . La construction effective d'un tel automate \mathcal{A}' peut être réalisée en suivant pas à pas, la preuve par induction structurelle du théorème de Büchi-Bruyere.

4- L'application $\nu : L(\mathcal{A}') \cap (1 \cdot \{0, 1\}^* \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathbb{N} - E'$ est une bijection. On peut calculer un automate \mathcal{A}'' qui reconnaît $L(\mathcal{A}') \cap (1 \cdot \{0, 1\}^* \cup \{\varepsilon\})$ puis tester si $L(\mathcal{A}'')$ est fini ou non : si \mathcal{A}'' possède un circuit accessible à partir de son état initial alors $\mathbb{N} - E'$ est infini, sinon $\mathbb{N} - E'$ est fini.

5- L'ensemble $\mathbb{N} - E'$ est fini si et seulement si il admet un majorant M . On exprime cette propriété par la formule suivante :

$$\exists M. \forall n. (\neg \Phi(n)) \rightarrow (\exists m. (n + m = M))$$

Exercice 7

1-

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \text{par } \mathbf{ASS} \quad (6)$$

$$d = d \quad \text{par } \mathbf{REF} \quad (7)$$

$$(a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d \quad \text{par } \mathbf{COMPf} \text{ appliqué à (6)(7)} \quad (8)$$

$$(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d \quad \text{par } \mathbf{ASS} \quad (9)$$

$$((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d) \quad \text{par } \mathbf{SYM} \text{ appliqué à (9)} \quad (10)$$

$$(a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d) \quad \text{par } \mathbf{TRANS} \text{ appliqué à (8)(10)} \quad (11)$$

2- Formalisons cette preuve dans LJ. Nous montrons que, pour tous termes $t, u, v, t_1, t_2, u_1, u_2$, les règles suivantes, notées **rsym**, **rtrans**, **rcompf**, sont des règles dérivées du système **LJ** :

$$\frac{}{\overline{MO, t = u \vdash u = t}} \mathbf{rsym} \quad \frac{}{\overline{MO, t = u \wedge u = v \vdash t = v}} \mathbf{rtrans}$$

$$\frac{}{\overline{MO, t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \vdash t_1 * u_1 = t_2 * u_2}} \mathbf{rcompf}$$

Nous montrons ci-dessous comment ces règles peuvent être écrites dans **LJ**.

Ensuite, nous construisons des preuves dans le système **LJMO** constitué des règles de **LJ** et des trois règles supplémentaires **rsym**, **rtrans**, **rcompf** :

$$\pi_1 \text{ prouve } \mathbf{MO} \vdash (a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d$$

$$\pi_2 \text{ prouve } \mathbf{MO} \vdash (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d$$

$$\pi_3 \text{ prouve } \mathbf{MO} \vdash ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d)$$

$$\pi \text{ prouve } \mathbf{MO} \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d)$$

Les trois règles dérivées :

$$\frac{\frac{\frac{}{t = u \vdash u = t} \text{ax}}{\frac{}{t = u \rightarrow u = t, t = u \vdash u = t} \rightarrow_g} \text{ax}'}{\frac{\frac{}{\forall x \forall y x = y \rightarrow y = x, t = u \vdash u = t} \forall_g^*}{\frac{}{MO, t = u \vdash u = t} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{t = u \wedge u = v \vdash t = u \wedge u = v} \text{ax}}{\frac{}{t = u \wedge u = v \rightarrow t = v, t = u \wedge u = v \vdash t = v} \rightarrow_g} \text{ax}'}{\frac{\frac{}{\forall x \forall y \forall z. x = y \wedge y = z \rightarrow x = z, t = u \wedge u = v \vdash t = v} \forall_g^*}{\frac{}{MO, t = u \wedge u = v \vdash t = v} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{}{t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \vdash t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2} \text{ax}}{\frac{}{t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \rightarrow t_1 * u_1 = t_2 * u_2, t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \vdash t_1 * u_1 = t_2 * u_2} \rightarrow_g} \text{ax}'}{\frac{\frac{}{\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2. x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \rightarrow x_1 * y_1 = x_2 * y_2, t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \vdash t_1 * u_1 = t_2 * u_2} \forall_g^*}{\frac{}{MO, t_1 = t_2 \wedge u_1 = u_2 \vdash t_1 * t_2 = u_1 * u_2} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO, E_0 \wedge d = d \vdash (a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d} \text{rcompf}} \text{coupure}$$

Notons E_0 l'égalité : $a * (b * c) = (a * b) * c$.

La preuve π_1 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{E_0 \vdash E_0} \text{ax}}{\frac{}{ASS \vdash E_0} \forall_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO \vdash E_0} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{\frac{\frac{}{d = d \vdash d = d} \text{ax}}{\frac{}{REF \vdash d = d} \forall_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO \vdash d = d} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO \vdash E_0 \wedge d = d} \wedge_d} \text{aff}_g^*}{\frac{\frac{}{MO, MO \vdash (a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d} \text{rcompf}}{\frac{}{MO \vdash (a * (b * c)) * d = ((a * b) * c) * d} \text{coupure}} \text{aff}_g^*}$$

La preuve π_2 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d \vdash (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d} \text{ax}}{\frac{}{ASS \vdash (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d} \forall_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO \vdash (a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*$$

Notons E_2 l'égalité : $(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d$.

La preuve π_3 :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\pi_2} \vdots}{\frac{}{MO \vdash E_2} \text{rsym}}{\frac{}{MO, E_2 \vdash ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d)} \text{coupure}} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO, MO \vdash ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d)} \text{aff}_g^*} \text{aff}_g^*}{\frac{}{MO \vdash ((a * b) * c) * d = (a * b) * (c * d)} \text{aff}_g^*}$$

Notons E_1 (resp. E_3) l'égalité démontrée par π_1 (resp. π_3). La preuve π :

$$\begin{array}{c}
\pi_1 \qquad \pi_3 \\
\vdots \qquad \vdots \\
\hline
MO \vdash E_1 \quad MO \vdash E_3 \quad \wedge_d \quad \hline
\hline
MO \vdash E_1 \wedge E_3 \qquad MO, E_1 \wedge E_3 \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d) \quad \text{rtrans} \\
\hline
\hline
MO, MO \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d) \quad \text{coupure} \\
\hline
MO, MO \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d) \quad \text{aff}_g^* \\
\hline
MO \vdash (a * (b * c)) * d = (a * b) * (c * d)
\end{array}$$