

LOGIQUE, INF 462

Corrigé de l' examen du 19/12/2008. Sujet de M. Sénizergues.

Exercice 4 (sur 4 points)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash P(x)}}^{\text{ax}'}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)}^{\wedge_g}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash \exists x P(x)}^{\exists_d} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash Q(x)}}^{\text{ax}'}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash Q(x)}^{\wedge_g}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash \exists x Q(x)}^{\exists_d}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))}^{\wedge_d}}{\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))}^{\exists_g}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash P(x)}}^{\text{ax}'}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash P(x)}^{\wedge_g}}{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash P(x)}^{\forall_g}}{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x)}^{\forall_d} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{\overline{P(x), Q(x) \vdash Q(x)}}^{\text{ax}'}}{P(x) \wedge Q(x) \vdash Q(x)}^{\wedge_g}}{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash Q(x)}^{\forall_g}}{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x Q(x)}^{\forall_d}}{\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))}^{\wedge_d}}$$

Exercice 5 (sur 2,5 points)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\overline{P(x) \vdash P(x), Q(x)}}^{\text{ax}'}}{P(x) \vee Q(x) \vdash P(x), Q(x)}^?}{\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash P(x), Q(x)}^?}{\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x P(x)), Q(x)}^{\text{erreur}}}{\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x P(x)), (\forall x Q(x))}^?}{\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))}^?$$

Le pas étiqueté par **erreur** introduit le quantificateur $\forall x$ dans la partie droite du séquent ; or la variable x a une occurrence *libre* dans $Q(x)$. Ce pas n'est donc pas une instance de la règle \forall_d .

2- Considérons les prédicats P, Q définis sur les entiers naturels par : $P(n)$ est vrai ssi n est pair, $Q(n)$ est vrai ssi n est impair. Soit

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, P, Q \rangle.$$

On a bien $\mathcal{N} \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$ mais $\mathcal{N} \not\models (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$. Le séquent $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ n'est donc pas valide dans \mathcal{N} .

Exercice 6 (sur 4,5 points)

Montrons les équivalences suivantes :

$$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv_{\text{LJ}} A \rightarrow (B \rightarrow C), \tag{1}$$

$$A \rightarrow (B \wedge C) \equiv_{\text{LJ}} (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C). \tag{2}$$

$$\frac{\frac{\overline{\overline{A, B \vdash A, B}}^{\text{ax}'}}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge_d \frac{\overline{\overline{A, B, C \vdash C}}^{\text{ax}'}}{A, B, C \vdash C}}{(A \wedge B) \rightarrow C, A, B \vdash C} \rightarrow_g \frac{(A \wedge B) \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C}{} \rightarrow_d (A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow_d$$

$$\frac{\frac{\overline{\overline{A, B \vdash A}}^{\text{ax}'}}{A \wedge B \vdash A} \wedge_g \frac{\overline{\overline{A, B \vdash B}}^{\text{ax}'}}{(A \wedge B) \vdash B} \wedge_g \frac{\overline{\overline{C, A \wedge B \vdash C}}^{\text{ax}'}}{B \rightarrow C, A \wedge B \vdash C} \rightarrow_g}{A \rightarrow (B \rightarrow C), A \wedge B \vdash C} \rightarrow_g \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C}{} \rightarrow_d$$

montrent que (1) est valide.

$$\frac{\frac{\overline{\overline{A \vdash A}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow (B \wedge C), A \vdash B} \rightarrow_g \frac{\overline{\overline{A, B, C \vdash B}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow (B \wedge C), A \vdash B} \rightarrow_g}{A \rightarrow (B \wedge C) \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_d \frac{\frac{\overline{\overline{B, C, A \vdash C}}^{\text{ax}'}}{B \wedge C, A \vdash C} \wedge_g \frac{\overline{\overline{A \vdash A}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow (B \wedge C), A \vdash C} \rightarrow_g}{A \rightarrow (B \wedge C) \vdash A \rightarrow C} \rightarrow_d}{A \rightarrow (B \wedge C) \vdash (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)} \wedge_d$$

$$\frac{\frac{\overline{\overline{A \rightarrow C, A \vdash A}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash B} \rightarrow_g \frac{\overline{\overline{B, A \rightarrow C, A \vdash B}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash B} \rightarrow_g \frac{\overline{\overline{A \rightarrow B, A \vdash A}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash C} \wedge_d \frac{\overline{\overline{A \rightarrow B, C, A \vdash C}}^{\text{ax}'}}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash C} \rightarrow_g}{A \rightarrow B, A \rightarrow C, A \vdash B \wedge C} \wedge_d \frac{(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), A \vdash B \wedge C}{} \wedge_g (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \vdash A \rightarrow (B \wedge C) \rightarrow_d$$

montrent que (2) est valide.

On en déduit :

$$\begin{aligned} A \rightarrow (B \rightarrow (C \wedge D)) &\equiv_{\text{LJ}} (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D) && \text{par (1)} \\ &\equiv_{\text{LJ}} ((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow D) && \text{par (2)}. \end{aligned}$$

Considérons la structure de Kripke \mathcal{K} définie par

$$\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$$

où $K = \{0, 1, 2\}$, $\leq = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2)\}$, $\Vdash = \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, C)\}$ (voir la figure 1).

On a :

$$0 \not\Vdash A, \quad 1 \Vdash B \vee C, \quad 2 \Vdash B \vee C$$

donc $0 \Vdash A \rightarrow (B \vee C)$. Par contre, on a aussi :

$$\begin{aligned} 1 \not\Vdash A \rightarrow C, \quad \text{donc } 0 \not\Vdash A \rightarrow C \\ 2 \not\Vdash A \rightarrow B, \quad \text{donc } 0 \not\Vdash A \rightarrow B \\ \text{donc } 0 \not\Vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \end{aligned}$$

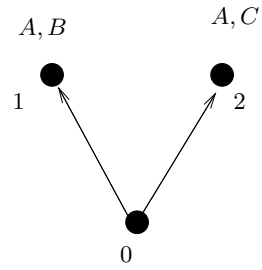


FIG. 1 – \mathcal{K} .

Le séquent $[A \rightarrow (B \vee C)] \vdash [(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)]$ n'est pas forcé par le noeud 0 de \mathcal{K} , il n'est donc pas prouvable dans LJ, ce qui montre que

$$[A \rightarrow (B \vee C)] \not\equiv_{\text{LJ}} [(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)].$$