

LOGIQUE

Corrigé du contrôle continu du 21 Novembre 2011

Exercice 1 (sur 6 points)

1-

$$\frac{\frac{\overline{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A}^{\text{ax}} \quad \frac{\overline{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A}^{\text{ax}}}{\overline{\neg\neg A, \neg A \vdash \perp}}^{\neg\text{elim}}}{\overline{\neg\neg A \vdash A}}^{\perp_{\text{classic}}}}$$

2- Montrons que \perp_{classic} est une règle dérivée de DNDN :

$$\frac{\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\neg A}^{\neg\text{intro}} \quad \frac{\frac{\overline{\neg\neg A \vdash A}^{\text{dn}}}{\Gamma, \neg\neg A \vdash A}^{\text{aff}}}{\Gamma \vdash \neg\neg A \rightarrow A}^{\rightarrow\text{intro}}}{\Gamma \vdash A}^{\rightarrow\text{elim}}$$

3- Tous les schémas de règles de DNDN autres que dn (double négation) sont des schémas de DN. De plus dn est une règle dérivée de DN (Q1). Donc tout séquent dérivable dans DNDN est dérivable dans DN.

Tout schéma de DN autre que \perp_{classic} est un schéma de DNDN. De plus, \perp_{classic} est une règle dérivée de DNDN (Q2). Donc tout séquent dérivable dans DN est dérivable dans DNDN.

4-

$$\frac{\frac{\overline{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A}^{\text{ax}}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}^{\vee\text{i}} \quad \frac{\overline{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}^{\text{ax}}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}^{\neg\text{e}}}{\frac{\overline{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \perp}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}^{\neg\text{i}}}{\frac{\overline{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \perp}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A}^{\neg\text{i}}}}^{\neg\text{e}} \quad \frac{\overline{\neg(A \vee \neg A) \vdash \perp}}{\vdash A \vee \neg A}^{\neg\text{i}}$$

5- Montrons que \perp_{elim} est une règle dérivée de DN :

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma, \neg A \vdash \perp}^{\text{aff}}}{\Gamma \vdash A}^{\perp_{\text{classic}}}$$

Les seuls schémas de règles de DNTE qui ne sont pas des schémas de DN sont : le schéma du tiers exclus et \perp_{elim} . D'après Q4 et la dérivation ci-dessus, ces deux schémas sont des règles dérivées de DN. Donc tout séquent dérivable dans DNTE est dérivable dans DN.

Tout schéma de DN autre que \perp_{classic} est un schéma de DNI donc de DNTE. De plus \perp_{classic} est une règle dérivée de DNTE :

$$\frac{\frac{\overline{\vdash A \vee \neg A}^{\text{te}}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}^{\text{aff}} \quad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma, \neg A \vdash A}^{\perp_{\text{e}}} \quad \frac{\overline{\Gamma, A \vdash A}^{\text{ax}}}{\Gamma \vdash A}^{\vee_{\text{e}}}}$$

N.B. la dernière étape de cette dérivation (il s'agit d'une contraction droite), utilise le fait que

$$\exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y) \equiv_{\alpha} \exists z \forall x P(z) \rightarrow P(x)$$

On vérifie que cette dérivation n'utilise pas la règle de coupure.

4- Soit π une (hypothétique) preuve sans coupure ni contraction de $\vdash \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)$. Le dernier pas de π ne peut pas être une règle structurelle : ce ne pourrait être qu'un affaiblissement droit, or \vdash n'est pas prouvable.

Donc ce dernier pas est une introduction de connecteur ou quantificateur. Comme la racine de l'unique formule de ce séquent est $\exists x$, ce serait une introduction à droite de \exists .

En raisonnant de même sur les deux pas précédents on voit que π a la forme suivante :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\overline{P(t) \vdash P(y)}}{\vdash P(t) \rightarrow P(y)} \rightarrow_d}{\vdash \forall y P(t) \rightarrow P(y)} \forall_d}{\vdash \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)} \exists_d$$

De plus, la formule $\forall y P(t) \rightarrow P(y)$ est de la forme

$$(\forall y P(x) \rightarrow P(y))[x := t]$$

ce qui entraîne qu'aucune variable de t n'a une occurrence liée dans $(\forall y P(x) \rightarrow P(y))$. Donc $t \neq y$ et $P(t) \vdash P(y)$ n'est pas un axiome. Comme $P(t), P(y)$ sont atomiques, aucune règle d'introduction n'a pu aboutir au séquent $P(t) \vdash P(y)$. La règle aboutissant à ce séquent est donc un affaiblissement (droit ou gauche). Le séquent juste au dessus serait donc l'un des deux séquents :

$$P(t) \vdash , \vdash P(y).$$

Mais aucun de ces séquents n'est prouvable dans LK (vu en cours). La preuve π ne peut donc pas exister.

5- Afin de donner une dérivation sans contraction du séquent $\vdash C$ où

$$C = \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$$

nous commençons par 4 dérivations auxiliaires : π_0, π_1 :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\exists x \neg P(x) \vdash \exists x \neg P(x)}}{\vdash \exists x \neg P(x), \neg \exists x \neg P(x)} \text{ax}}{\vdash (\exists x \neg P(x)) \vee (\neg \exists x \neg P(x))} \forall_d}{\frac{\frac{\frac{\overline{P(x) \vdash P(x), P(y)}}{\neg P(x), P(x) \vdash P(y)} \text{ax}'}{\neg P(x) \vdash P(x) \rightarrow P(y)} \rightarrow_d}{\neg P(x) \vdash \forall y P(x) \rightarrow P(y)} \forall_d}{\neg P(x) \vdash \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)} \exists_d}{\exists x \neg P(x) \vdash \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)} \exists_g$$

$\pi_2, \pi_3 :$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{P(x) \vdash P(x)}^{\text{ax}}}{\vdash \neg P(x), P(x)}^{\neg_d}}{\vdash \exists x \neg P(x), P(x)}^{\exists_d}}{\neg \exists x \neg P(x) \vdash P(x)}^{\neg_g}}{\neg \exists x \neg P(x) \vdash \forall x P(x)}^{\forall_d} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\overline{P(x), P(y) \vdash P(y)}^{\text{ax}'}}{P(y) \vdash P(x) \rightarrow P(y)}^{\rightarrow_d}}{\forall y P(y) \vdash P(x) \rightarrow P(y)}^{\forall_g}}{\forall y P(y) \vdash \forall y P(x) \rightarrow P(y)}^{\forall_d}}{\forall y P(y) \vdash \exists x \forall y P(x) \rightarrow P(y)}^{\exists_d}$$

que nous assemblons en une preuve de C :

$$\frac{\frac{\frac{\pi_0}{\vdash (\exists x \neg P(x)) \vee \neg \exists x \neg P(x)} \quad \frac{\frac{\frac{\pi_1}{\exists x \neg P(x) \vdash C} \quad \frac{\frac{\frac{\pi_2}{\neg \exists x \neg P(x) \vdash C} \quad \frac{\pi_3}{\forall y P(y) \vdash C}}{\neg \exists x \neg P(x) \vdash C}^{\text{coupure}}}}{\exists x \neg P(x) \vdash C}^{\forall_g}}{\vdash (\exists x \neg P(x)) \vee \neg \exists x \neg P(x)}^{\text{coupure}}}{\vdash C}$$