Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2010/2011

# LOGIQUE

Corrigé du contrôle continu du 29 Novembre 2010

**Exercice 1**(sur 5 points)

1- Voici des preuves dans LK :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_d$}
\UnaryInfC{$P \vdash P, R$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg P, P \vdash R$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$(P \wedge Q) \to R, \neg P, P \vdash R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}^2$}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash P, R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}^2$}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash Q, R$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$P, Q \vdash P \wedge Q, R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$R \vdash R$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g^2$}
\UnaryInfC{$P, Q, R \vdash R$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$(P \wedge Q) \to R, Q, P \vdash R$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$(P \wedge Q) \to R, \neg P \vee Q, P \vdash R$}
\RightLabel{$\wedge_g$}
\UnaryInfC{$((P \wedge Q) \to R) \wedge (\neg P \vee Q), P \vdash R$}
\RightLabel{$\to_d^2$}
\UnaryInfC{$\vdash [((P \wedge Q) \to R) \wedge (\neg P \vee Q)] \to (P \to R)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$P(x) \vdash P(x)$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_d$}
\UnaryInfC{$P(x) \vdash P(x), Q(y)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$Q(y) \vdash Q(y)$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$P(x), Q(y) \vdash Q(y)$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$P(x) \to Q(y), P(x) \vdash Q(y)$}
\RightLabel{$\exists_d$}
\UnaryInfC{$P(x) \to Q(y), P(x) \vdash \exists y\ Q(y)$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$P(x) \to Q(y), \forall x\ P(x) \vdash \exists y\ Q(y)$}
\RightLabel{$\exists_g$}
\UnaryInfC{$\exists y\ P(x) \to Q(y), \forall x\ P(x) \vdash \exists y\ Q(y)$}
\RightLabel{$\forall_g$}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\exists y\ P(x) \to Q(y)), \forall x\ P(x) \vdash \exists y\ Q(y)$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$\forall x\ (\exists y\ P(x) \to Q(y)) \vdash \forall x\ P(x) \to \exists y\ Q(y)$}
\end{prooftree}
$$

2- Voici une preuve dans LJ.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$P \vdash P$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash Q$}
\RightLabel{$\vee_d^1$}
\UnaryInfC{$P, Q \vdash Q \vee R$}
\RightLabel{$\to_g$}
\BinaryInfC{$P \to Q, P \vdash Q \vee R$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}$}
\UnaryInfC{$R \vdash R$}
\RightLabel{$\vee_d^2$}
\UnaryInfC{$R \vdash Q \vee R$}
\RightLabel{$\mathtt{aff}_g$}
\UnaryInfC{$P \to Q, R \vdash Q \vee R$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$P \to Q, P \vee R \vdash Q \vee R$}
\RightLabel{$\to_d$}
\UnaryInfC{$P \to Q \vdash (P \vee R) \to (Q \vee R)$}
\end{prooftree}
$$

**Exercice 2**(sur 8 points)

1- Voici une preuve dans LK.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\mathtt{ax}'$}
\UnaryInfC{$A, B \vdash B$}
\RightLabel{$\wedge_d$}
\BinaryInfC{$A, B \vdash A \wedge B$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B), A, B \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d^2$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A, \neg B$}
\RightLabel{$\vee_d$}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$}
\end{prooftree}
$$

2- Soient $A, B$ des variables propositionnelles fixes. Considérons une preuve $\pi$ de taille minimale , dont la conclusion appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{G} := \bigcup_{p\in\mathbb{N},q\in\mathbb{N}} \{p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash \} \cup \{p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash \ B \} \cup \{p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash \ A\wedge B\}$$

où $p, q$ sont des entiers positifs ou nuls. Distinguons 3 cas selon la forme de la conclusion $\Phi$ de cette preuve.

**cas 1** : $\Phi = p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash$

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est une règle de contraction ou d'affaiblissement à gauche, alors la prémisse de cette r'egle est la forme $\Phi' = p'\neg(A\wedge B), q'A$, donc appartient à $\mathcal{G}$.

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est la règle d'introduction de la négation à droite, alors la prémisse de cette r'egle est $\Phi' = (p-1)\neg(A\wedge B), qA \vdash \ \ A\wedge B$, donc appartient à $\mathcal{G}$.

Mais alors $\Phi'$ serait un élément de $\mathcal{G}$ admettant une preuve plus petite que $\pi$, ce qui contredirait la définition de $\Phi$. Par ailleurs aucun autre règle de LJ ne peut aboutir à $\Phi$. Ce cas est donc impossible.

**cas 2** : $\Phi = p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash \ B$

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est une règle de contraction ou d'affaiblissement à gauche, alors la prémisse de cette r'egle est la forme $\Phi' = p'\neg(A\wedge B), q'A \vdash \ B$ .

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est la règle d'affaiblissement à droite, alors la prémisse de cette r'egle est $\Phi' = p\neg(A\wedge B), qA \vdash$ .

De nouveau, $\Phi' \in \mathcal{G}$ et la minimalité de $\pi$ est contredite.

**cas 3** : $\Phi = p\neg(A\wedge B), qA \ \vdash \ A\wedge B$

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est une règle de contraction ou d'affaiblissement à gauche, alors la prémisse de cette règle est la forme $\Phi' = p'\neg(A\wedge B), q'A \vdash \ A\wedge B$.

Si la dernière règle utilisée par $\pi$ est la règle d'affaiblissement à droite, alors la prémisse de cette r'egle est $\Phi' = p\neg(A\wedge B), qA \vdash$ .

De nouveau, $\Phi' \in \mathcal{G}$ et la minimalité de $\pi$ est contredite.

3- Considérons une preuve $\pi$, dans LJ, du séquent de la forme $p\neg(A\wedge B) \ \vdash \ \neg A$. Le couple (dernière règle utilisée qui n'est pas structurelle à gauche, prémisse $\Phi'$ de cette règle) peut être :

$(\neg_d, p'\neg(A\wedge B), A \ \ \vdash\ )$ ou $(\mathtt{aff}_d, p'\neg(A\wedge B), A \ \ \vdash\ )$. Dans les deux cas $\Phi' \in \mathcal{G}$ ce qui est impossible, d'après la question 2.

4- Considérons une preuve $\pi$, dans LJ, du séquent $\neg(A\wedge B) \ \vdash \ \neg A \vee \neg B$.

Le couple (dernière règle utilisée qui n'est pas structurelle à gauche, prémisse $\Phi'$ de cette règle) peut être de la forme :

$(\mathtt{aff}_d, p\neg(A\wedge B) \ \vdash\ )$ ou $(\vee_d^1, p\neg(A\wedge B) \ \vdash \ \neg A)$ ou $(\vee_d^2, p\neg(A\wedge B) \ \vdash \ \neg B)$.

Les deux premiers cas donnent à nouveau $\Phi' \in \mathcal{G}$, ce qui est impossible, d'après la question 2. Dans le troisi'eme cas , le séquent $(p\neg(A\wedge B) \ \vdash \ \neg B)$ serait prouvable dans LJ. En permutant $A$ et $B$ dans la question 3, on voit que ce séquent n'est pas prouvable dans LJ. Finalement , la preuve $\pi$ ne peut pas exister.

## Exercice 3(sur 20 points)

1-

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A\vdash D \quad \Gamma, B\vdash D}{\Gamma, A\vee B\vdash D}\vee_g \quad \Gamma, C\vdash D}{\Gamma, (A\vee B)\vee C\vdash D}\vee_g$$

2-

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x=x\vdash x=x}\,\mathtt{ax}}{\Gamma, x=x\vdash x=x}\,\mathtt{aff}^*_g}{\Gamma,\forall x\; x=x\vdash x=x}\,\forall_g}{\Gamma,\forall x\; x=x\vdash x=x}\,\mathtt{aff}^*_g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x=y}{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x=y, y=x}\,\mathtt{aff}_d \quad \dfrac{}{\Gamma,\mathrm{EG},y=x\vdash y=x}\,\mathtt{ax}'}{\Gamma,\mathrm{EG},x=y\to y=x\vdash y=x}\,\to_g}{\Gamma,\mathrm{EG},\forall x\forall y\; x=y\to y=x\vdash y=x}\,\forall^2_g}{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash y=x}\,\mathtt{aff}_g$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x=y \quad \Gamma,\mathrm{EG}\vdash y=z}{\Gamma,\mathrm{EG},\vdash x=y\wedge y=z}\,\wedge_d}{\Gamma,\mathrm{EG},\vdash x=y\wedge y=z, x=z}\,\mathtt{aff}_d \quad \dfrac{}{\Gamma,\mathrm{EG},x=z\vdash x=z}\,\mathtt{ax}'}{\Gamma,\mathrm{EG},(x=y\wedge y=z)\to x=z\vdash x=z}\,\to_g}{\Gamma,\mathrm{EG},\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z)\to x=z\vdash x=z}\,\forall^3_g}{\Gamma,\mathrm{EG}\ \vdash x=z}\,\mathtt{contr}_g$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x_1=y_1 \quad \Gamma,\mathrm{EG}\vdash x_2=y_2}{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x_1=y_1\wedge x_2=y_2}\,\wedge_d}{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x_1=y_1\wedge x_2=y_2, x_1*x_2=y_1*y_2}\,\mathtt{aff}_d \quad \dfrac{}{\Gamma,\mathrm{EG},x_1*x_2=y_1*y_2\vdash x_1*x_2=y_1*y_2}\,\mathtt{ax}'}{\Gamma,\mathrm{EG},x_1=y_1\wedge x_2=y_2\to x_1*x_2=y_1*y_2\vdash x_1*x_2=y_1*y_2}\,\to_g}{\Gamma,\mathrm{EG},\forall x_1,x_2,x_3,x_4\;\; x_1=y_1\wedge x_2=y_2\to x_1*x_2=y_1*y_2\vdash x_1*x_2=y_1*y_2}\,\forall^4_g}{\Gamma,\mathrm{EG}\vdash x_1*x_2=y_1*y_2}\,\mathtt{contr}_g$$

3-

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{MO,t*e=t\vdash t*e=t}\,\mathtt{ax}'}{MO,t*e=t,e*t=t\vdash t*e=t}\,\mathtt{aff}_g}{MO,t*e=t\wedge e*t=t\vdash t*e=t}\,\wedge_g}{MO,\forall x\; x*e=x\wedge e*x=x\vdash t*e=t}\,\forall_g}{MO\vdash t*e=t}\,\mathtt{aff}_g$$

On peut donner , une preuve analogue de la règle NG, en partant du séquent $MO,e*t=t\vdash e*t=t$ au lieu de $MO,t*e=t\vdash t*e=t$.

4-

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x*e=x}}\,ND}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x*e}}\,SYM \quad \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x}}\,REF \quad \dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash e=x*x}}\,\mathtt{ax}'}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x*e=x*(x*x)}}\,COMP}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x*(x*x)}}\,TRANS$$

5- Considérons les trois preuves $\pi_0,\pi_1,\pi_2$ suivantes :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x*e=x}}\,ND}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x*e}}\,SYM \quad \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x}}\,REF \quad \dfrac{}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash e=x*x}}\,\mathtt{ax}'}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x*e=x*(x*x)}}\,COMP}{\mathrm{MO2,e=x*x\vdash x=x*(x*x)}}\,TRANS$$

$$
\dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x}}\,\mathtt{ax}' \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x}}\,REF \quad \dfrac{}{\mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x}}\,\mathtt{ax}'}{\mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} * \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,COMP}{\mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,TRANS
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash e = x}\,\mathtt{ax}'}{\Gamma \vdash x = e}\,SYM \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash e = e * e}\,NG \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash e = x}\,\mathtt{ax}' \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash e = e * e}\,NG \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash e = x}\,\mathtt{ax}' \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash e = x}\,\mathtt{ax}'}{\Gamma \vdash e * e = x * x}\,COMP}{\Gamma \vdash e = x * x}\,TRANS}{\Gamma \vdash e * e = x * (x * x)}\,COMP}{\Gamma \vdash e = x * (x * x)}\,TRANS}{\mathrm{MO2}, \mathrm{e} = \mathrm{x} \vdash \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,TRANS
$$

(dans la troisième preuve $\Gamma$ dénote le multi-ensemble de formules $MO2 + e = x$). En ajoutant une application de la règle $\rightarrow_d$ à chacune des conclusions de ces preuves on obtient les 3 preuves demandées.

6-

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_0\\ \vdots\\ \mathrm{MO2}, \mathrm{e} = \mathrm{x}^2 \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x}^2)\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \mathrm{MO2}, \mathrm{x} = \mathrm{x}^2 \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x}^2)\end{array} \quad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \mathrm{MO2}, \mathrm{e} = \mathrm{x} \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x}^2)\end{array}}{\mathrm{MO2}, \mathrm{e} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vee \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vee \mathrm{e} = \mathrm{x} \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,\vee\vee_g}{\mathrm{MO2}, \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{e} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vee \mathrm{x} = \mathrm{x} * \mathrm{x} \vee \mathrm{e} = \mathrm{x}) \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,\forall_g}{\mathrm{MO2} \vdash \forall \mathrm{x}\ \mathrm{x} = \mathrm{x} * (\mathrm{x} * \mathrm{x})}\,\mathtt{contr}_g
$$

7- Soit $\mathcal{A}_0$ la structure de domaine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et où le symbole $*$ est interprété par l'addition (des classes modulo 2). On a alors

$$\mathcal{A} \models \mathrm{MO2} \ \ \& \ \ \mathcal{A} \models \forall x\ e = x * x$$

8- Soit $\mathcal{A}_1$ la structure de domaine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et où le symbole $*$ est interprété par la multiplication (des classes modulo 2). On a alors

$$\mathcal{A} \models \mathrm{MO2} \ \ \& \ \ \mathcal{A} \not\models \forall x\ e = x * x$$

puisque $1 \neq 0 \cdot 0$ (modulo 2).

9- Par le théorème d'adéquation, si le séquent $\mathrm{MO2} \vdash \forall x\ e = x * x$ était prouvable dans LK, alors on aurait, pour toute structure $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A} \models \mathrm{MO2}$ alors $\mathcal{A} \models \forall x\ e = x * x$. Comme la structure $\mathcal{A}_1$ viole cette implication, le séquent $\mathrm{MO2} \vdash \forall x\ e = x * x$ n'est pas prouvable dans LK.