

LOGIQUE

Corrigé du contrôle continu du 27 Novembre 2008

Exercice 1 (sur 6 points)

1- La première règle est la règle d'élimination de l'implication dans le système DN. On a vu en cours que *toutes* les règles de DN sont des règles dérivées de LK.

2- Instancions la deuxième règle par les multi-ensembles $\Gamma := \emptyset, \Delta := \emptyset, \Gamma' := \emptyset, \Delta' := \emptyset$ et les formules $A := \perp, B := \neg\perp$. Considérons les preuves π_0, π_1 dans LK :

$$\frac{\overline{\perp \vdash \perp}^{\text{ax}}}{\vdash \perp, \neg\perp}^{\neg_d} \quad \frac{\overline{\perp \vdash \perp}^{\text{ax}}}{\perp, \neg\perp \vdash}^{\neg_g}$$

En utilisant cette deuxième règle (R2), on obtient une preuve de \vdash :

$$\frac{\overline{\overline{\vdash \perp, \neg\perp}}^{\pi_0} \quad \overline{\overline{\perp, \neg\perp \vdash}}^{\pi_1}}{\vdash}^{\text{R2}}$$

Or, le « séquent vide », n'est pas prouvable dans LK. La deuxième règle n'est donc pas dérivable dans LK.

3- La règle R1 (élimination de \rightarrow) ne peut être simulée par une dérivation *sans coupure* de LK. Les règles de $\text{LK} \setminus \{ \text{coupure} \}$ sont toutes des règles d'introduction ou des règles structurelles. Supposons que R1 soit simulée par une preuve π sans coupure, utilisant les hypothèses $H_1 := \Gamma \vdash A$ et $H_2 := \Gamma \vdash A \rightarrow B$. Comme cette preuve a pour racine $R = \Gamma \vdash B$, elle n'a aucun noeud étiqueté par H_1 , car A est une sous-formule de H_1 qui n'est pas sous-formule de R ; de même, elle n'a aucun noeud étiqueté par H_2 car $A \rightarrow B$ est une sous-formule de H_2 qui n'est pas sous-formule de R . Donc π est une preuve dans LK du séquent $\Gamma \vdash A$. En remplaçant dans ce séquent (et dans π), Γ par \emptyset et A par \perp , on obtient une preuve π' de $\vdash \perp$, ce qui n'est pas possible.

Exercice 2 (sur 4 points)

Les deux séquents sont prouvables dans LK :

$$\frac{\overline{B \vdash B}^{\text{ax}}}{\overline{A, B, A \vdash B}^{\text{aff}^*}} \xrightarrow{\rightarrow_d} \frac{\overline{A, B \vdash A \rightarrow B}^{\rightarrow_d} \quad \overline{C \vdash C}^{\text{ax}}}{\overline{A, B \vdash A \rightarrow B, C}^{\text{aff}^*}} \xrightarrow{\rightarrow_g} \frac{\overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C, A, B \vdash C}^{\rightarrow_d}}{\overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C, A \vdash B \rightarrow C}^{\rightarrow_d}} \xrightarrow{\rightarrow_d} \overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)}^{\rightarrow_d}$$

$$\frac{\overline{B \vdash B}^{\text{ax}}}{\overline{A \rightarrow C, B, A \vdash B, C}^{\text{aff}^*}} \xrightarrow{\rightarrow_d} \frac{\overline{A \rightarrow C, B \vdash A \rightarrow B, C}^{\rightarrow_d} \quad \overline{C \vdash C}^{\text{ax}}}{\overline{A \rightarrow C, B, C \vdash C}^{\text{aff}^*}} \xrightarrow{\rightarrow_g} \frac{\overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C, A \rightarrow C, B \vdash C}^{\rightarrow_d}}{\overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C, A \rightarrow C \vdash B \rightarrow C}^{\rightarrow_d}} \xrightarrow{\rightarrow_d} \overline{(A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)}^{\rightarrow_d}$$

Exercice 3(sur 6 points)

$$\frac{\frac{\frac{\overline{R(y) \vdash R(y)}^{\text{ax}}}{\neg R(y), R(y) \vdash}^{\neg_g}}{\neg R(y), R(y) \vdash R(x)}^{\text{aff}_d}}{\neg R(y) \vdash R(y) \rightarrow R(x)}^{\rightarrow_d}}{\frac{\forall y \neg R(y) \vdash R(y) \rightarrow R(x)}{\forall y \neg R(y) \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(x))}^{\forall_d}}^{\forall_g} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{R(x) \vdash R(x)}^{\text{ax}}}{R(x) \vdash \exists x R(x)}^{\exists_d}}{R(x), \neg \exists x R(x) \vdash}^{\neg_g}}{\neg \exists x R(x) \vdash \neg R(x)}^{\neg_d}}{\neg \exists x R(x) \vdash \forall x \neg R(x)}^{\forall_d}^{\neg_g}$$

On construit la troisième preuve en réutilisant les deux premières preuves, notées π_1, π_2 :

$$\frac{\frac{\overline{\neg \exists x R(x) \vdash \forall x \neg R(x)}^{\pi_2} \quad \overline{\forall y \neg R(y) \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(x))}^{\pi_1}}{\neg \exists x R(x) \vdash \forall y (R(y) \rightarrow R(x))}^{\text{coupure}}}{\neg \exists x R(x) \vdash \exists x \forall y (R(y) \rightarrow R(x))}^{\exists_d}$$

Exercice 4(sur 6 points)

Nous montrons par induction structurale que pour toute formule A , il existe une dérivation atomique α_A du séquent $A \vdash A$.

Base Les dérivations α_{\perp} et α_P (où P désigne une proposition atomique) sont trivialement définies par

$$\frac{}{\perp \vdash \perp}^{\text{ax}} \quad \frac{}{P \vdash P}^{\text{ax}}$$

Induction Supposons l'existence de dérivations atomiques α_A et α_B . Alors $\alpha_{A \wedge B}$, $\alpha_{A \vee B}$, $\alpha_{A \rightarrow B}$, $\alpha_{\neg A}$, $\alpha_{\forall x.A}$ et $\alpha_{\exists x.A}$ sont définies par

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A}}{A, B \vdash A}^{\text{aff}_g} \quad \frac{\overline{B \vdash B}^{\alpha_B}}{A, B \vdash B}^{\text{aff}_g}}{A, B \vdash A \wedge B}^{\wedge_d}}{A \wedge B \vdash A \wedge B}^{\wedge_g} \quad \frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A}}{A \vdash A \vee B}^{\vee_d^1} \quad \frac{\overline{B \vdash B}^{\alpha_B}}{B \vdash A \vee B}^{\vee_d^2}}{A \vee B \vdash A \vee B}^{\vee_g}$$

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A} \quad \frac{\overline{B \vdash B}^{\alpha_B}}{A, B \vdash B}^{\text{aff}_g}}{A, A \rightarrow B \vdash B}^{\rightarrow_g}}{A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B}^{\rightarrow_d}$$

$$\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A}}{A, \neg A \vdash}^{\neg_g}}{\neg A \vdash \neg A}^{\neg_d} \quad \frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A}}{\forall x \cdot A \vdash A}^{\forall_g}}{\forall x \cdot A \vdash \forall x \cdot A}^{\forall_d} \quad \frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\alpha_A}}{A \vdash \exists x \cdot A}^{\exists_d}}{\exists x \cdot A \vdash \exists x \cdot A}^{\exists_g}$$