Université Bordeaux 1
Master d'Informatique 1, 2009/2010

LOGIQUE

Sujet de contrôle continu- 30 Novembre 2009

Durée : 1H 30
Documents autorisés : notes de cours, feuilles et notes de TD.

Exercice 1(sur 4 points)

1- Donner des preuves dans LK des séquents suivants :

$$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$$

$$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$

$$\vdash \neg\neg(\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$$

$$\vdash (\neg \exists x P(x)) \rightarrow (\forall x \neg P(x))$$

2- Donner une preuve dans LJ du quatrième séquent de la question 1.

Exercice 2(sur 3 points)

Le professeur Cosinus, qui est quelquefois distrait, pense avoir écrit une preuve dans LJ du séquent $\vdash \neg(A \vee \neg A)$.
1- Pourquoi cette preuve est-elle nécessairement incorrecte ?
2- Critiquer chaque étape de déduction de la preuve de Cosinus :

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\bot_g$}
\UnaryInfC{$\bot \vdash$}
\RightLabel{$\texttt{aff}^*$}
\UnaryInfC{$A \vdash$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$\texttt{ax}$}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\texttt{contr}_g$}
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\RightLabel{$\neg_g$}
\UnaryInfC{$\neg A \vdash$}
\RightLabel{$\vee_g$}
\BinaryInfC{$A \vee \neg A \vdash$}
\RightLabel{$\neg_d$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\end{prooftree}$$

Exercice 3(sur 3 points)

Soit Γ un multi-ensemble fini de formules et A, B deux formules telles que :

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} A \vee B \tag{1}$$

1- Montrer que l'affirmation (1) entraine que le séquent $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$ est, lui-aussi, prouvable dans LK.
2- Décrire, à partir d'une preuve π, dans LK, du séquent $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} A \vee B$, une preuve π', dans LK, du séquent $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$.
Attention : Γ peut ne pas être vide ; la dernière règle d'inférence utilisée par π n'est donc pas nécessairement $\vee_d$.
3- Supposons que la preuve π donnée ci-dessus soit sans-coupure. La preuve π' que vous décrivez en réponse à la question 2 est-elle sans-coupure ? peut-on construire, à partir de π', une preuve π'', dans LK, *sans-coupure*, du séquent $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow B$?

Exercice 4(sur 10 points)
On rappelle que l'ensemble d'axiomes **P0** est formé de l'union de l'ensemble des axiomes de l'égalité (noté EG) avec l'ensemble des sept axiomes suivants :
A1 : $\forall x \;\; \neg S(x) = 0$
A2 : $\forall x \;\; (x = 0 \vee \exists y, x = S(y)$
A3 : $\forall x \forall y \;\; (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
A4 : $\forall x \;\; (x + 0 = x)$
A5 : $\forall x \forall y \;\; (x + S(y) = S(x + y))$
A6 : $\forall x \;\; (x \times 0 = 0)$
A7 : $\forall x \forall y \;\; (x \times S(y) = x \times y + x)$
On considère la structure $\mathcal{A}$, dont le domaine est $A := \{0, 1, 2\}$ et où les symboles de fonctions $0, S, +$ sont interprétés comme suit :

$$0_{\mathcal{A}} := 0, \;\; S_{\mathcal{A}}(0) := 1, S_{\mathcal{A}}(1) =: 2, S_{\mathcal{A}}(2) := 1$$

$+_{\mathcal{A}}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	1
2	2	1	2

1- Vérifier que

$$\mathcal{A} \models \text{ A1} \wedge \text{A2} \wedge \text{A4} \wedge \text{A5}$$

2- Montrer que, ces interprétations de $0, S, +$ étant fixées, il n'existe qu'une interprétation possible $\times_{\mathcal{A}}$ du symbole de fonction binaire $\times$ telle que

$$\mathcal{A} \models \text{ A6} \wedge \text{A7}$$

Donner la table de cette opération $\times_{\mathcal{A}}$.
3- Est-il vrai que

$$\mathcal{A} \models \text{ A3?}$$

4- Le séquent $\text{EG}, \text{A1}, \text{A2}, \text{A4}, \text{A5}, \text{A6}, \text{A7} \vdash \text{A3}$ est-il prouvable dans LK ? (donner une justification précise).
5- Le séquent $\text{EG}, \text{A1}, \text{A2}, \text{A4}, \text{A5}, \text{A6}, \text{A7} \vdash \neg\text{A3}$ est-il prouvable dans LK ? (donner une justification précise).