Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2008/2009

LOGIQUE

Sujet de contrôle continu- 27 Novembre 2008

Durée : 2 H
Documents autorisés : notes de cours, feuilles et notes de TD.

Exercice 1(sur 4 points)
On se demande si certaines règles commodes pourraient être ajoutées à LK, sans modification de l' ensemble des séquents prouvables.
1- La règle suivante est-elle une règle dérivée du système LK ?

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

2- La règle suivante est-elle une règle dérivée du système LK ?

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B \quad A, B, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Aide : on examinera soigneusement le cas d' une instantiation telle que $B = \neg A$.
3- Pour chacune de ces règles, dire si on peut la simuler par une dérivation sans coupure de LK.

Exercice 2(sur 4 points)
On se demande quelles propriétés algébriques possède l'implication. On considère les deux séquents S_1, S_2 suivants :

$$\begin{aligned} S_1 &:= (A \to B) \to C \vdash A \to (B \to C) \\ S_2 &:= (A \to B) \to C \vdash (A \to C) \to (B \to C) \end{aligned}$$

Pour chacun de ces deux séquents, déterminer s'il est prouvable dans LK ;
- si oui, donner une preuve dans LK,
- si non, donner un argument qui montre la non-existence d'une preuve.

Exercice 3(sur 6 points)
Donner des preuves dans LJ des séquents suivants :

$$\forall y \neg R(y) \vdash \forall y (R(y) \to R(x))$$

$$\neg \exists x R(x) \vdash \forall x \neg R(x))$$

$$\neg \exists x R(x) \vdash \exists x \forall y (R(y) \to R(x))$$

Exercice 4(sur 6 points)
Une dérivation est dite *atomique* si tout axiome $A \vdash A$ y figurant est de la forme $\bot \vdash \bot$ ou $P \vdash P$, où P est une proposition atomique (par opposition à une formule comportant au moins un connecteur ou un quantificateur). Montrer que pour toute formule A, le séquent $A \vdash A$ admet une dérivation atomique dans LJ.