

LOGICS, J1IN7M21
 Examen du 14/12/2015

Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.
 Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera $\min\{exo1 + exo2 + exo3 + exo4, 10\}$.
 Les noms de règles utilisés sont ceux des notes de cours et des memos utilisés en TD : il s'agit d'acronymes *anglo-saxons* (right, left , weakening, etc ...)

Exercice 1 (3 pts)

Parmi les quatre règles suivantes, lesquelles sont des règles dérivées du système LK ? :

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta} \text{R1} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{R2} \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{R3} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{R4}$$

(on justifiera précisément chaque réponse).

Exercice 2 (3 pts)

On considère le séquent

$$S : \neg(A \vee B) \vdash (\neg A) \wedge (\neg B)$$

1- Est-il vrai que :

$$\neg(A \vee B) \Vdash (\neg A) \wedge (\neg B) \quad ?$$

2- Le séquent S est-il prouvable dans LJ ? (Donner un argument précis).

3- Reprendre les questions 1 et 2, mais pour le séquent S' (au lieu de S) :

$$S' : \neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$$

Exercice 3 (2 pts)

On considère l'esquisse de "preuve" dans LJ :

$$\frac{\frac{\frac{A \vdash A}{\vdash A} \text{ax}}{\vdash A \vee \exists x Q(x)} \vee_r^1 \quad \frac{\frac{\frac{\frac{Q(x) \vdash Q(x)}{\vdash Q(x)} \text{ax}}{\vdash A \vee Q(x)} \vee_l \quad \frac{\vdash A \vee Q(x)}{\exists x Q(x) \vdash A \vee Q(x)} \exists_l}{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)} \exists_r}{\frac{A, \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}{\neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash \neg A} \neg_l \quad \frac{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)}{\neg(A \vee \exists x Q(x)), \exists x Q(x) \vdash} \exists_r}{\frac{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x), \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \neg \neg(A \vee \exists x Q(x))} \neg_r} \neg_r$$

- 1- Insérer les noms de règles qui sont absents et corriger ceux qui sont incorrects.
- 2- Est-ce que certaines inférences ne correspondent à aucune règle de LJ ?
- 3- La conclusion de cette "preuve" est-elle prouvable dans LJ ? dans LK ?

Exercice 4 (10 pts)

Nous examinons dans cet exercice une notion de *détour* qui est l'analogue, pour la déduction naturelle, de la notion de *coupure* en calcul des séquents. Nous nous restreindrons, pour cet exercice, à la déduction naturelle propositionnelle et intuitionniste.

Un détour immédiat, dans une preuve de NJ, est une règle d'introduction d'un connecteur, immédiatement suivie d'une règle d'élimination du même connecteur (et portant sur l'occurrence du connecteur que l'on vient d'introduire). Plus généralement, un détour, dans une preuve de NJ, est une règle d'introduction d'un connecteur, suivie d'un nombre fini d'affaiblissements, puis d'une règle d'élimination du même connecteur (portant sur l'occurrence du connecteur que l'on vient d'introduire).

Schéma général (à gauche détour immédiat, à droite détour), pour le connecteur \rightarrow :

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_{\text{intro}}}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_{\text{elim}}, \quad \frac{\frac{\vdots}{\Gamma' \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_{\text{intro}}}{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B} \text{wkn}^*}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_{\text{elim}}$$

Exemple 1 : cette preuve a un détour (introduction puis élimination de la même occurrence du connecteur \rightarrow) :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C} \text{ax}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C \rightarrow (A \wedge B)} \text{ax}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash A \wedge B} \rightarrow_{\text{elim}}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash A} \rightarrow_{\text{elim}} \quad \frac{\frac{\frac{C, C \rightarrow (A \wedge B), A \wedge B \vdash A \wedge B}{C, C \rightarrow (A \wedge B), A \wedge B \vdash A} \text{ax}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash (A \wedge B) \rightarrow A} \wedge_{\text{elim}}^{\ell}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash (A \wedge B) \rightarrow A} \rightarrow_{\text{intro}}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash A} \rightarrow_{\text{elim}}$$

Exemple 2 : cette preuve est sans-détour :

$$\frac{\frac{\frac{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C} \text{ax}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash C \rightarrow (A \wedge B)} \text{ax}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash A \wedge B} \rightarrow_{\text{elim}}}{C, C \rightarrow (A \wedge B) \vdash A} \wedge_{\text{elim}}^{\ell}$$

1- Parmi les deux preuves suivantes, où Γ dénote l'ensemble $\{A \wedge B, A \rightarrow C, C \rightarrow \perp\}$, lesquelles sont sans-détour ?

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A} \text{ax}}{\Gamma, A \vdash C} \rightarrow_{\text{elim}}}{\Gamma, A \vdash \perp} \rightarrow_{\text{elim}}}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_{\text{intro}} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma, A \vdash A \rightarrow C}{\Gamma, A \vdash C \rightarrow \perp} \text{ax}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \text{ax}}{\Gamma \vdash A} \wedge_{\text{elim}}^{\ell}}{\Gamma \vdash \perp} \neg_{\text{elim}}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \text{ax}}{\Gamma \vdash C} \wedge_{\text{elim}}^{\ell}}{\Gamma \vdash C} \rightarrow_{\text{elim}}}{\Gamma \vdash \perp} \rightarrow_{\text{elim}} \quad \frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow C}{\Gamma \vdash C \rightarrow \perp} \text{ax}}{\Gamma \vdash \perp} \rightarrow_{\text{elim}}}{\Gamma \vdash \perp} \rightarrow_{\text{elim}}$$

Cette preuve, où Γ' dénote l'ensemble $\{C, C \rightarrow A, \neg A, \neg B\}$, est-elle sans-détour ?

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma' \vdash C}^{\text{ax}} \quad \overline{\Gamma' \vdash C \rightarrow A}^{\text{ax}}}{\Gamma' \vdash A} \rightarrow_{\text{elim}}}{\Gamma' \vdash A \vee B} \vee_{\text{intro}} \quad \frac{\frac{\overline{\Gamma', A \vdash A}^{\text{ax}} \quad \overline{\Gamma', A \vdash \neg A}^{\text{ax}}}{\Gamma', A \vdash \perp} \neg_{\text{elim}} \quad \frac{\overline{\Gamma', B \vdash B}^{\text{ax}} \quad \overline{\Gamma', B \vdash \neg B}^{\text{ax}}}{\Gamma', B \vdash \perp} \neg_{\text{elim}}}{\Gamma' \vdash \perp} \vee_{\text{elim}}}{\Gamma' \vdash \perp}$$

2- Supposons qu'une preuve π , dans NJ, se termine par une règle d'introduction de \wedge , suivie d'une règle d'élimination de \wedge . Comment peut-on extraire de π , une preuve dans NJ, plus courte, du même séquent, et comportant un détour de moins ?

Malheureusement, l'amorce d'élimination des détours suggérée par la question 2 ne s'étend pas facilement à tous les connecteurs ...

- 3- Soit π une preuve, dans NJ, sans-détour, de $\Gamma, A, B \vdash C$. Montrer qu'on peut construire, à partir de π , une preuve π' dans NJ, sans-détour, de $\Gamma, A \wedge B \vdash C$.
- 4- Supposons que le séquent $\Gamma, A \wedge B \vdash C$ admet une preuve σ , en calcul des séquents intuitionniste LJ, sans-coupure, de taille n (i.e. nombre de noeuds), qui se termine par la règle d'introduction à gauche de \wedge :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_l \end{array}$$

Supposons que l'on sait transformer toute preuve *sans-coupure* dans LJ, de taille $\leq n - 1$, de conclusion $\Gamma' \vdash C'$ (où Γ' , (resp. C') sont quelconques) en une preuve *sans-détour* de NJ, ayant la même conclusion $\Gamma' \vdash C'$. Montrer qu'alors, on peut transformer σ en une preuve *sans-détour* dans NJ, du séquent $\Gamma, A \wedge B \vdash C$.

5- Esquisser une démonstration du théorème suivant : pour toute preuve π dans NJ (propositionnelle), il existe une preuve π' dans NJ (propositionnelle), qui est sans-détour et qui a la même conclusion que π . Donner un plan clair de votre démonstration (même si le *nombre de cas* à traiter ne vous permet pas de mettre votre plan à exécution).

Aide : On peut espérer généraliser la question 4 à chaque règle d'introduction d'un connecteur dans LJ ; puis bâtir une (méta)-démonstration par récurrence ...

6- Transformer votre esquisse, autant que possible, en (méta)-démonstration.