

LOGIQUE, IN7M12

Examen du 14/12/2012

Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera :
 $\min\{exo1 + exo2 + exo3, 10\}$.

Exercice 1 (4 pts /10)

1- Donner une preuve dans LK des séquents :

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ \exists x (A \vee Q(x)) &\vdash (\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \\ \neg \forall x (A \vee P(x)) &\vdash \exists x ((\neg A) \wedge \neg P(x)) \end{aligned}$$

Exercice 2 (4 pts /10)

Pour chacun des séquents S_i suivants ($1 \leq i \leq 3$), déterminer si S_i est prouvable dans LJ.

$$S_1 : (A \vee B) \rightarrow C \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$$

$$S_2 : \neg(A \wedge B) \vdash (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$S_3 : \neg \neg(A \wedge B) \vdash \neg((\neg A) \vee (\neg B))$$

Aide : on pourra considérer la structure de Kripke possédant trois noeuds distincts k_0, k_1, k_2 , munie de l'ordre $k_0 \leq k_1, k_0 \leq k_2$ et telle que $\Vdash_0 = \{(k_1, A), (k_2, B)\}$.

Exercice 3 (8 pts /10)

Rappelons que le système LK utilise le schéma de règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \rightarrow_g$$

Considérons le schéma de règle, plus faible, que nous nommerons **imp_g-f** :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C} \text{imp}_g\text{-f}$$

(l'acronyme **imp_g-f** évoque une "introduction à gauche de l'implication *faible*").

Nous définissons un système formel **FLK** par :

- les jugements de **FLK** sont exactement les jugements de LK
- les schémas de règle de **FLK** sont les schémas de LK, sauf le schéma de règle \rightarrow_g , qui est remplacé par le schéma **imp_g-f**.

1- Montrer que, pour toute formule A ,

$$\neg \neg A \vdash_{\text{FLK}} A.$$

Pour tout multi-ensemble de formules (à alpha-équivalence près) $\Delta = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ nous notons

$$\neg \Delta := \neg B_1 + \neg B_2 + \dots + \neg B_n.$$

2- Montrer que

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \neg \Delta \vdash \perp} \text{FLK}$$

3- Montrer que

$$\frac{\Gamma, \neg \Delta \vdash \perp}{\Gamma \vdash \Delta} \text{FLK}$$

4- Quelle relation y-a-t-il entre l'ensemble des séquents prouvables dans LK et l'ensemble des séquents prouvables dans FLK ?