

LOGIQUE, INF 462

Examen du 20/12/2010

Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. La note obtenue à cette moitié de l'examen sera $\min\{exo1 + exo2 + exo3, 10\}$.

Exercice 4 (3 pts /10)

Parmi les quatre règles suivantes, lesquelles sont des règles dérivées du système LK ? :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash B \rightarrow C}{\Gamma \vdash A \rightarrow C} R1 \quad \frac{\Gamma \vdash B \quad B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} R2 \quad \frac{\Gamma \vdash B, C \quad B, C \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} R3$$

$$\frac{\Gamma \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)}{\Gamma \vdash A \rightarrow (B \vee C)} R4$$

(on justifiera précisément chaque réponse).

Exercice 5 (3 pts /10)

Pour chacun des séquents S_i suivants ($1 \leq i \leq 2$), déterminer si S_i est prouvable dans LJ.

$$S_1 : A \rightarrow B \vdash (\neg A) \vee B \quad S_2 : (\neg A) \vee B \vdash A \rightarrow B$$

Aide : pour traiter S_1 on pourra construire une structure de Kripke possédant deux noeuds $0 \leq 1$ et telle que $\Vdash_0 = \{(1, A), (1, B)\}$.

Exercice 6 (6 pts /10)

Soit X un alphabet fini possédant au moins 2 éléments distincts. On considère la signature \mathcal{S} formée des symboles de prédicat binaires $\approx, =, \preceq$ et des symboles de fonctions unaires s_x (pour $x \in X$). On considère la structure sur la signature \mathcal{S} :

$$\mathcal{M} := \langle X^*; \approx^{\mathcal{M}}, =^{\mathcal{M}}, \preceq^{\mathcal{M}}; (s_x^{\mathcal{M}})_{x \in X} \rangle$$

définie par : pour tous mots $u, v \in X^*$

- $u \approx^{\mathcal{M}} v$ si et seulement si u et v ont la même longueur
- $u =^{\mathcal{M}} v$ si et seulement si u et v sont égaux
- $u \preceq^{\mathcal{M}} v$ si et seulement si u est un préfixe de v
- $s_x(u)$ est le mot $u \cdot x$ i.e. $s_x(u)$ est le "successeur à droite" par x , de u .

Pour tous mots $u, v \in X^*$, on note $S(u, v)$ la *superposition* de u et de v : il s'agit du mot

$$S(u, v) := (x_0, y_0) \cdots (x_i, y_i) \cdots (x_{\ell-1}, y_{\ell-1})$$

sur l'alphabet $(X \cup \{\#\}) \times (X \cup \{\#\})$, de longueur $\ell = \max\{|u|, |v|\}$, tel que

$\forall i \in [0, |u|-1], x_i = u[i], \forall i \in [|u|, \ell-1], x_i = \#, \forall j \in [0, |v|-1], y_j = v[j], \forall j \in [0, |v|, \ell-1], y_j = \#$.

Par exemple : si $u = abb, v = baaba, w = abab$ alors

$$S(u, v) = (a, b)(b, a)(b, a)(\#, b)(\#, a), \quad S(v, u) = (b, a)(a, b)(a, b)(b, \#)(a, \#)$$

- 1- Pour les mots u, v, w de l'exemple ci-dessus, que valent $S(u, w), S(v, w)$?
 2- Montrer que les langages

$$L_{\approx} := \{S(u, v) \mid u, v \in X^*, |u| = |v|\}, \quad L_{=} := \{S(u, v) \mid u, v \in X^*, u = v\},$$

$$L_{\leq} := \{S(u, v) \mid u, v \in X^*, \exists w \in X^*, u \cdot w = v\}$$

sont rationnels.

- 3- Soit $x \in X$. Montrer que le langage

$$L_x := \{S(u, v) \mid u, v \in X^*, u \cdot x = v\}$$

est rationnel.

- 4- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute formule du premier ordre $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sur la signature \mathcal{S} , à variables dans $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, le langage

$$L(\Phi) := \{S(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_1, u_2, \dots, u_n \in X^*, \mathcal{M} \models \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n)\}$$

est rationnel.

- 5- Soit $x \in X$. Le langage

$$\{S(u, v) \mid u, v \in X^*, x \cdot u = v\}$$

qui décrit la fonction *successeur à gauche* par x , est-il rationnel ?

- 6- Existe-t-il une formule du premier ordre $\Phi(z_1, z_2)$ sur la signature \mathcal{S} , telle que, pour tous mots $u, v \in X^*$

$$\mathcal{M} \models \Phi(u, v) \text{ si et seulement si } x \cdot u = v ?$$