

LOGIQUE

Sujet de contrôle continu- 21 Octobre 2011

Durée : 1H 30

Documents autorisés : notes de cours, feuilles et notes de TD.

Indications : Les 3 exercices sont indépendants. Dans chaque exercice, on peut *admettre* le résultat de certaines questions (en le mentionnant clairement sur la copie), puis *utiliser* ce résultat dans la suite de l'exercice.

Exercice 1(sur 6 points)

1- Donner une preuve dans DN du séquent :

$$\neg\neg A \vdash A$$

où A est une variable propositionnelle.

On considère le système formel DNDN défini par :

- les jugements de DNDN sont les mêmes que ceux de DN
- les schémas de règles de déduction sont : tous les schémas de règles de DN, sauf le schéma \perp_{classic} , auxquels on ajoute le schéma

$$\frac{}{\neg\neg A \vdash A} \text{dn}$$

(schéma de la double négation)

2- Montrer que, \perp_{classic} est une règle dérivée de DNDN.

3- Montrer que les jugements dérivables dans DN et dans DNDN sont les mêmes.

4- Donner une preuve dans DN du séquent :

$$\vdash A \vee \neg A$$

où A est une variable propositionnelle.

On considère le système formel DNTE défini par :

- les jugements de DNTE sont les mêmes que ceux de DN
- les schémas de règles de déduction sont : tous les schémas de règles de DNI, auxquels on ajoute le schéma

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A} \text{te}$$

(schéma du tiers exclus).

5- Les jugements prouvables dans DN et dans DNTE sont-ils les mêmes ?

Exercice 2(sur 6 points)

1- Trouver, pour chacun des trois séquents suivants, une dérivation dans LK :

$$A \rightarrow (B \vee C) \vdash (\neg A) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow A) \vdash \neg(\exists x (P(x) \wedge \neg A))$$

où A, B, C sont des variables propositionnelles et P est un symbole de prédicat d'arité 1.

2- Parmi ces trois séquents, lesquels sont prouvables dans LJ ?

Aide : on pourra considérer la structure de Kripke suivante et examiner la validité des deux premiers séquents dans cette structure :

$$K := \{0, 1, 2\}, \quad 0 \leq 1, 0 \leq 2 ; \quad \Vdash_0 := \{(1, A), (1, B)\}$$

Exercice 3(sur 8 points)

Soit P un symbole de prédicat d'arité 1.

1- Expliquer, par un raisonnement sémantique, pourquoi, dans toute structure \mathcal{A} sur une signature contenant le symbole P , on a

$$\mathcal{A} \models \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$$

2- Donner une dérivation dans LK du séquent

$$\vdash \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$$

3- Donner une dérivation dans LK, *sans coupure*, du séquent

$$\vdash \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$$

4- Existe-t-il une dérivation dans LK, *sans coupure ni contraction*, de ce séquent ?

5- Existe-t-il une dérivation dans LK, *sans contraction*, de ce séquent ?