

LOGIQUE, IN7M12
Devoir surveillé du 16/10/2015

Tous documents autorisés ; durée : 1h 30.

Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. La note obtenue à cette épreuve sera $\min\{exo1 + exo2 + exo3 + Pb, 20\}$.

Exercice 1 (4 pts)

Donner une preuve dans LK des séquents :

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$$
$$\neg(\forall y P(y)) \vdash \exists x \neg P(x)$$

Exercice 2 (4 pts)

Donner une preuve dans LJ des séquents :

$$(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \neg \forall x ((\neg A) \wedge \neg Q(x))$$
$$\exists x (A \vee Q(x)) \vdash A \vee \exists x Q(x)$$

Exercice 3 (4 pts)

On considère la structure de Kripke (d'ordre 0) suivante :

$$\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$$

où $K = \{k_0, k_1, k_2\}$, $\leq = \{(k_0, k_0), (k_1, k_1), (k_2, k_2), (k_0, k_1), (k_0, k_2)\}$, $\Vdash_0 = \{(k_1, A), (k_2, B)\}$

1- Le séquent S_1 est-il forcé par le noeud k_0 de cette structure ?

$$S_1 : \vdash (\neg(A \wedge B)) \rightarrow ((\neg A) \vee \neg\neg B)$$

2- S_1 est-il prouvable dans LJ ? dans LK ?

3- Reprendre les questions 1 et 2 pour le séquent :

$$S_2 : \vdash (\neg(A \wedge B)) \rightarrow \neg(A \vee \neg\neg B)$$

Problème (20 pts)

Les questions précédées d'une étoile peuvent être difficiles. Le candidat peut sauter une question et *utiliser* le résultat de cette question dans les questions qui suivent (en le mentionnant clairement).

Dans ce problème on considère *deux systèmes formels* différents et on cherche à *comparer* l'ensemble des théorèmes qu'ils prouvent. On fixe un ensemble dénombrable de variables propositionnelles (i.e. des symboles de prédicats d'arité 0)

$$\mathcal{P} = \{P, Q, R, \dots\}$$

On appelle formule propositionnelle *minimale*, toute formule sur l'ensemble de variables \mathcal{P} et l'ensemble de connecteurs $\mathcal{C} = \{\rightarrow\}$. On note $\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$ l'ensemble des formules propositionnelles minimales sur l'ensemble de variables propositionnelles \mathcal{P} .

Le système SH_0 :

Ce système a pour ensemble de jugements $\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$. Il a deux schémas d'axiomes :

$\text{AX}_1 : A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$\text{AX}_2 : (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

et un schéma de règle de déduction (le " Modus Ponens") :

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \text{MP}$$

Le système LJ_0 :

Ce système a pour ensemble de jugements, tous les séquents de la forme

$$\Gamma \vdash \Phi$$

où Γ est un ensemble de formules propositionnelles minimales et Φ est une formule propositionnelle minimale. Il a un schéma d'axiome :

$$\text{AX} : A \vdash A$$

et quatre schémas de règles de déduction (qui sont des schémas de règle de LJ) :

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{wkn}_\ell \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C} \rightarrow_\ell \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_r \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C} \text{cut}$$

Partie 1 : simuler SH_0 dans LJ_0

1- Montrer que $\vdash \text{AX}_1$ et $\vdash \text{AX}_2$ sont prouvables dans LJ_0 .

2- Montrer que, $\frac{\vdash A \quad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ est une règle dérivée du système LJ_0 .

3- Montrer que, pour toute formule Φ , si Φ est prouvable dans SH_0 alors $\vdash \Phi$ est prouvable dans LJ_0 .

Partie 2 : simuler LJ_0 dans SH_0

* 4- Donner une preuve dans SH_0 , de la formule $P \rightarrow P$ (où P est une variable propositionnelle)
Aide : on peut trouver une preuve de longueur 5.

5- Montrer que

$$\frac{B}{A \rightarrow B}$$

est une règle dérivée du système SH_0 .

6- Montrer que si, $\frac{B_1, \dots, B_n}{C}$ est une règle dérivée du système SH_0 , alors, $\frac{A \rightarrow B_1, \dots, A \rightarrow B_n}{A \rightarrow C}$ est aussi une règle dérivée de SH_0 .

7- En déduire que, si $\frac{A, B_1, \dots, B_n, D}{C}$ est une règle dérivée du système SH_0 , alors, $\frac{B_1, \dots, B_n, A \rightarrow D}{A \rightarrow C}$ et $\frac{B_1, \dots, B_n, D}{A \rightarrow C}$ sont aussi des règles dérivées de SH_0 .

Traduction des séquents intuitionnistes en formules :

On fixe un ordre total sur les formules, que l'on note \leq . Soit $\Gamma \vdash \Phi$ un séquent intuitionniste. L'ensemble Γ est formé de n formules :

$$\Phi_1 < \Phi_2 < \dots < \Phi_n.$$

On pose alors :

$$\tau(\Gamma \vdash \Phi) := \Phi_1 \rightarrow (\Phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\Phi_n \rightarrow \Phi))$$

(si $n = 0$, i.e. $\Gamma = \emptyset$, $\tau(\Gamma \vdash \Phi) := \Phi$)

par exemple :

$$\tau(P, Q \rightarrow R, P \rightarrow Q \vdash R) = P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R))$$

(si les formules du membre gauche de ce séquent sont données par ordre croissant pour \leq).

8- Montrer que,

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

est une règle dérivée du système \mathbf{SH}_0 .

* 9- En déduire que, si \preceq_1 et \preceq_2 sont deux ordres totaux sur les formules et si τ_1 (resp. τ_2) est la traduction obtenue en suivant l'ordre \preceq_1 (resp. \preceq_2), alors, pour tout séquent intuitionniste $\Gamma \vdash \Phi$,

$$\frac{\tau_1(\Gamma \vdash \Phi)}{\tau_2(\Gamma \vdash \Phi)}$$

est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 .

10- 10.1 Montrer que l'image par τ de la règle d'introduction à droite de l'implication est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 .

10.2 On traite maintenant la règle d'introduction à gauche de l'implication ; montrer que $\frac{A \quad B \rightarrow C}{(A \rightarrow B) \rightarrow C}$ est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 .

En déduire que, pour tout ensemble de formules Γ ,

$$\frac{\tau(\Gamma \vdash A) \quad \tau(\Gamma, B \vdash C)}{\tau(\Gamma, A \rightarrow B \vdash C)}$$

est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 .

10.3 Montrer que l'image par τ de la règle d'affaiblissement à gauche est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 .

10.4 Montrer que l'image par τ de la règle de coupure (de \mathbf{LJ}_0) est une règle dérivée de \mathbf{SH}_0 . Aide : On pourra traiter chaque règle, d'abord pour un ordre \preceq particulier, puis en déduire le cas général en appliquant le résultat de Q9.

11- Montrer que, pour tout séquent intuitionniste $\Gamma \vdash \Phi$, prouvable dans \mathbf{LJ}_0 , la formule $\tau(\Gamma \vdash \Phi)$ est prouvable dans \mathbf{SH}_0 .

12- Que peut-on conclure sur la comparaison entre les jugements prouvables dans \mathbf{LJ}_0 et les jugements prouvables dans \mathbf{SH}_0 ?