

**LOGICS, J1IN7M21**  
 Corrigé de l'examen du 14/12/2015

La note obtenue à cette moitié de l'examen est  $\min\{exo1 + exo2 + exo3 + exo4, 10\}$ .

**Exercice 1**

Les règles R1,R2 sont des règles dérivées du système LK :

$$\frac{\frac{\frac{}{A, B \vdash A} \text{ax}' \quad \frac{}{A, B \vdash B} \text{ax}'}{A, B \vdash A \wedge B} \wedge_r \quad \frac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \text{cut}}{\Gamma, A, B \vdash \Delta} \text{cut} \quad \frac{\frac{}{A, B \vdash A} \text{ax}'}{A \wedge B \vdash A} \wedge_l \quad \frac{}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \text{cut}}{\Gamma \vdash A, \Delta} \text{cut}$$

Considérons le système étendu LK + R3. Ce système étendu admet la preuve suivante du "séquent faux" :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{}{\perp \vdash} \text{ax}}{\vdash \neg \perp} \neg_r}{\vdash \perp, \neg \perp} \text{wkn}_r}{\vdash \perp \vee \neg \perp} \vee_r}{\vdash \perp} R3$$

Comme  $\vdash \perp$  n'est pas prouvable dans LK, les systèmes (LK + R3) et LK ne sont pas équivalents, ce qui entraîne que R3 n'est pas une règle dérivée du système LK.

La règle R4 est une règle dérivée du système LK :

$$\frac{\frac{\frac{}{A \vdash A} \text{ax}}{A, \neg A \vdash} \neg_l \quad \frac{}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \text{cut}}{A \vdash \neg \neg A} \neg_r \quad \frac{}{\Gamma, \neg \neg A \vdash \Delta} \neg_l}{\Gamma, A \vdash \Delta} \text{cut}$$

**Exercice 2**

1- Selon la définition inductive de la relation de forçage,  $k \Vdash \neg(A \vee B)$  signifie :

$$\forall k' \geq k, \neg(k' \Vdash A \vee B)$$

i.e.

$$\forall k' \geq k, \neg((k' \Vdash A) \text{ ou } (k' \Vdash B))$$

i.e.

$$\forall k' \geq k, \neg(k' \Vdash A) \text{ et } \neg(k' \Vdash B)$$

i.e.

$$\forall k' \geq k, k' \not\Vdash A \text{ et } k' \not\Vdash B \tag{1}$$

De même,  $k \Vdash (\neg A) \wedge (\neg B)$  signifie :

$$k \Vdash (\neg A) \text{ et } k \Vdash (\neg B)$$

i.e.

$$[\forall k' \geq k, k \not\Vdash A] \text{ et } [\forall k' \geq k, k \not\Vdash B]$$

i.e.

$$[\forall k' \geq k, k' \not\Vdash A] \text{ et } [\forall k' \geq k, k' \not\Vdash B]. \quad (2)$$

La condition (1) entraîne la condition (2). On a donc établi que :

$$\neg(A \vee B) \Vdash (\neg A) \wedge (\neg B)$$

2- Par le théorème de complétude du système LJ pour la sémantique de Kripke, on déduit de la question 1 que  $S$  est prouvable dans LJ.

3- Considérons la structure de Kripke suivante :

$$\mathcal{K} := \langle K, \leq, \Vdash \rangle$$

où  $K = \{0, 1, 2\}$ ,  $\leq = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (0, 2)\}$ ,  $\Vdash_0 = \{(1, A), (2, B)\}$  (voir la figure 1).

Pour tout noeud  $k' \in \{0, 1, 2\}$  :  $k' \not\Vdash A \wedge B$ . Donc,

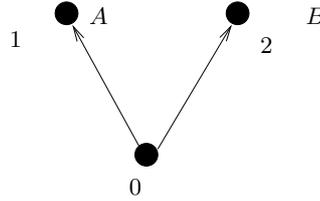


FIGURE 1 –  $\mathcal{K}$ .

$$\forall k' \geq 0, k' \not\Vdash A \wedge B$$

ce qui est sémantiquement équivalent à :

$$0 \Vdash \neg(A \wedge B) \quad (3)$$

Par ailleurs  $1 \Vdash A$  donc  $0 \not\Vdash \neg A$ .

Par ailleurs  $2 \Vdash B$  donc  $0 \not\Vdash \neg B$ .

On en déduit que

$$0 \not\Vdash (\neg A) \vee (\neg B) \quad (4)$$

Par (3)(4) on obtient :

$$\neg(A \wedge B) \not\Vdash (\neg A) \vee (\neg B)$$

Comme  $S'$  n'est pas (sémantiquement) *valide*, par le théorème d'adéquation,  $S'$  n'est pas (syntaxiquement) *prouvable* dans LJ.

### Exercice 3

1-2 Voici le même arbre de séquents que dans l'énoncé.

Les noms de règles sont corrigés (lorsqu' une règle de LJ est possible), la mention " no-rule" signifie que l'inférence ne correspond à aucune règle de LJ.

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\text{ax}}}{A \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\vee_r^1} \quad \frac{\frac{\overline{Q(x) \vdash Q(x)}^{\text{ax}}}{Q(x) \vdash A \vee Q(x)}^{\vee_r^2} \quad \frac{\overline{\exists x Q(x) \vdash A \vee Q(x)}^{\text{no-rule}}}{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\text{no-rule}}}{A, \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}^{\neg_l} \quad \frac{\overline{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\text{no-rule}}}{\neg(A \vee \exists x Q(x)), \exists x Q(x) \vdash}^{\neg_l}}{\neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash \neg A}^{\neg_r} \quad \frac{\overline{\neg(A \vee \exists x Q(x)), \exists x Q(x) \vdash}^{\neg_l}}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x), \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}^{\rightarrow_l}}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \neg \neg(A \vee \exists x Q(x))}^{\neg_r}$$

Voici une preuve, dans LJ, du même séquent :

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A \vdash A}^{\text{ax}}}{A \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\vee_r^1} \quad \frac{\overline{\exists x Q(x) \vdash \exists x Q(x)}^{\text{ax}}}{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\vee_r^2}}{A, \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}^{\neg_l} \quad \frac{\overline{\exists x Q(x) \vdash A \vee \exists x Q(x)}^{\vee_r^2}}{\neg(A \vee \exists x Q(x)), \exists x Q(x) \vdash}^{\neg_l}}{\neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash \neg A}^{\neg_r} \quad \frac{\overline{\neg(A \vee \exists x Q(x)), \exists x Q(x) \vdash}^{\neg_l}}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x), \neg(A \vee \exists x Q(x)) \vdash}^{\rightarrow_l}}{(\neg A) \rightarrow \exists x Q(x) \vdash \neg \neg(A \vee \exists x Q(x))}^{\neg_r}$$

### Exercice 4 (10 pts)

1-La première preuve contient le détour suivant :

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash \neg A}^{\neg_{\text{intro}}} \quad \frac{\vdots}{\Gamma \vdash A}}{\vdots}^{\neg_{\text{elim}}}$$

La seconde preuve est sans détour.

La preuve  $\pi'$  comporte le détour :

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma' \vdash A \vee B}^{\vee_{\text{intro}}} \quad \frac{\vdots \quad \vdots}{\Gamma', A \vdash \perp \quad \Gamma', B \vdash \perp}^{\vee_{\text{elim}}}}{\vdots}^{\vee_{\text{elim}}}$$

2- La preuve  $\pi$  a l'une des formes suivantes :

$$\frac{\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}^{\wedge_{\text{intro}}} \quad \frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}^{\wedge_{\text{intro}}}}{\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}^{\wedge_{\text{elim}}^\ell} \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}^{\wedge_{\text{elim}}^r}}$$

Dans le cas de gauche (resp. de droite)  $\pi_1$  (resp.  $\pi_2$ ) est une preuve du même séquent que  $\pi$ , qui a un détour de moins.

3- Démontrons, par récurrence sur la taille de  $\pi$ , la propriété :

**Si**  $\pi$  est une preuve sans-détour (dans NJ), de  $\Gamma, A, B \vdash C$  ou de  $\Gamma, A \vdash C$

**alors**,

- il existe une preuve  $\pi'$ , sans-détour, de  $\Gamma, A \wedge B \vdash C$  (resp. de  $\Gamma, B \wedge A \vdash C$ )
- **et** si la dernière règle non-structurale de  $\pi$  est une règle d'introduction  $R$ , alors la dernière règle non-structurale de  $\pi'$  est la même règle  $R$ .

**Base :**

$\pi$  a un seul noeud : c'est l'axiome  $\Gamma, A, B \vdash C$ .

- si  $C \in \Gamma$  : alors la preuve  $\pi'$  consistant en l'axiome  $\Gamma, A \wedge B \vdash C$  convient.
- si  $C = A$  : la preuve  $\pi'$  suivante convient

$$\frac{\overline{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}^{\text{ax}}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A} \wedge_{\text{elim}}^{\ell}$$

- si  $C = B$  : la preuve  $\pi'$  suivante convient

$$\frac{\overline{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}^{\text{ax}}}{\Gamma, A \wedge B \vdash B} \wedge_{\text{elim}}^r$$

**Induction :**

On distingue tous les cas possibles pour la dernière règle de  $\pi$ .

**Cas 1 :**  $\pi$  se termine par un affaiblissement.

Elle a donc l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C} \text{wkn} & \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C} \text{wkn} & \frac{\Gamma', A, B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C} \text{wkn} & \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{wkn} & \frac{\Gamma', A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} \text{wkn} \end{array}$$

où  $\Gamma'$  est l'ensemble  $\Gamma$  privé d'une formule.

Notons  $\pi_1$  la preuve  $\pi$  privée de sa dernière inférence.

Si  $\pi$  a l'une des formes 1,2 alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $\pi_1$ , on obtient une preuve sans détour  $\pi'_1$  de :

$$\Gamma, A \wedge B \vdash C.$$

De plus, la dernière règle non-structurale de  $\pi_1$  est la même que celle de  $\pi$ . Donc, par hyp. de rec., si la dernière règle non-structurale de  $\pi$  est une règle d'introduction  $R$ , alors la dernière règle non-structurale de  $\pi'_1$  est la même règle  $R$ . Donc  $\pi' := \pi'_1$  convient.

Si  $\pi$  a la forme 4, alors, la preuve  $\pi'$  suivante convient :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \text{wkn} \end{array}$$

Si  $\pi$  a l' une des formes 3,5 alors, en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $\pi_1$ , on obtient une preuve sans détour  $\pi'_1$  de :

$$\Gamma', A \wedge B \vdash C,$$

et, si la dernière règle non-structurale de  $\pi$  est une règle d'introduction  $R$ , alors la dernière règle non-structurale de  $\pi'_1$  est la même règle  $R$ . La preuve  $\pi'$  suivante convient :

$$\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \\ \frac{\Gamma', A \wedge B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \text{wkn} \end{array}$$

les mêmes arguments fournissent des preuves  $\pi'$  du séquent  $\Gamma, B \wedge A \vdash C$  remplissant les conditions demandées.

**Cas 2** :  $\pi$  se termine par  $\wedge_{\text{elim}}^\ell$ .

La preuve  $\pi$  a l'une des deux formes :

$$\begin{array}{c} \pi_1 \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C \wedge D}{\Gamma, A, B \vdash C} \wedge_{\text{elim}}^\ell \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_1 \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, A \vdash C \wedge D}{\Gamma, A \vdash C} \wedge_{\text{elim}}^\ell \end{array}$$

Comme  $\pi$  est sans détour, la dernière règle non-structurale de  $\pi_1$  n'est pas  $\wedge_{\text{intro}}$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $\pi_1$ , on obtient une preuve sans détour  $\pi'_1$  de :

$$\Gamma, A \wedge B \vdash C \wedge D$$

dont la dernière règle non-structurale n'est pas  $\wedge_{\text{intro}}$ .

Considérons la preuve  $\pi'$  suivante :

$$\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \\ \frac{\Gamma, A \wedge B \vdash C \wedge D}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge_{\text{elim}}^\ell \end{array}$$

Comme la dernière règle non-structurale de  $\pi'_1$  n'est pas  $\wedge_{\text{intro}}$ , la dernière règle de  $\pi'$  n'est pas un détour. Comme par ailleurs  $\pi'_1$  est sans-détour,  $\pi'$  est sans-détour.

(Mêmes arguments pour  $\Gamma, B \wedge A \vdash C$ ).

**Cas 3** :  $\pi$  se termine par  $\wedge_{\text{intro}}$ .

La preuve  $\pi$  a l'une des deux formes :

$$\begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{\Gamma, A, B \vdash C \quad \Gamma, A, B \vdash D}{\Gamma, A, B \vdash C \wedge D} \wedge_{\text{intro}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, A \vdash D}{\Gamma, A \vdash C \wedge D} \wedge_{\text{intro}} \end{array}$$

Traitons la première forme.

Les preuves  $\pi_1, \pi_2$  sont sans détour. Par hypothèse de récurrence on en déduit l'existence de preuves sans détour  $\pi'_1$  (resp.  $\pi'_2$ ) de  $\Gamma, A \wedge B \vdash D$  (resp.  $\Gamma, A \wedge B \vdash E$ ). On bâtit alors la preuve  $\pi'$  :

$$\frac{\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{c} \pi'_2 \\ \vdots \end{array}}{\Gamma, A \wedge B \vdash C \quad \Gamma, A \wedge B \vdash D} \wedge_{\text{intro}} \\ \Gamma, A \wedge B \vdash C \wedge D$$

Comme elle se termine par une introduction et comme les sous-preuves  $\pi'_1, \pi'_2$  sont sans-détour,  $\pi'$  est sans détour. De plus, la dernière règle non-structurale de  $\pi'$  est la même règle d'introduction que dans  $\pi$ .

**Cas 4** :  $\pi$  se termine par une règle d'élimination.

Ce cas peut être traité avec les mêmes arguments que le cas 2.

**Cas 5** :  $\pi$  se termine par une règle d'introduction.

Ce cas peut être traité avec les mêmes arguments que le cas 3.

4- Notons  $\sigma'$  la preuve, dans LJ, obtenue en supprimant la dernière inférence dans  $\sigma$  :  $c'$  est une preuve, dans LJ, de taille  $n - 1$ , du séquent

$$\Gamma, A, B \vdash C$$

D'après l'hypothèse de la question 4 : il existe une preuve  $\pi'$  dans NJ, sans détour, du même séquent. En appliquant la question 3, il existe donc une preuve  $\pi$  dans NJ, sans détour, du séquent

$$\Gamma, A \wedge B \vdash C.$$

5- Esquissons un plan de (méta)-démonstration.

Soit  $\pi$  une preuve dans NJ d'un séquent  $S$  de NJ. D'après le cours, le même séquent (où l'ensemble des formules en hypothèse est identifié à un *multi-ensemble*) admet une preuve  $\sigma$  dans LJ.

D'après le théorème d'élimination des coupures, le même séquent  $S$  a une preuve sans coupure, dans LJ.

**Le coeur de la question :**

Démontrons que toute preuve sans-coupure  $\sigma$ , de LJ est transformable en une preuve sans-détour dans NJ : une telle méta-démonstration peut être menée à bien, par récurrence sur la taille de  $\sigma$ . Nous avons déjà traité à la question 4 le cas où la dernière règle de  $\sigma$  est  $\wedge_\ell$ . Il reste à traiter chacune des 13 autres règles propositionnelles de LJ.

**fin du coeur**

Comme  $S$  a une preuve sans-coupure, dans LJ, par la méta-démonstration ci-dessus, il a aussi une preuve sans détour, dans NJ.

6- Progressons dans le coeur de la question 5.

Soit  $\sigma$ , preuve sans-coupure de LJ. On distingue tous les cas possibles pour la dernière règle de  $\sigma$ .

**cas 1**  $\sigma$  se termine par  $\wedge_\ell$ .

C'est le cas traité dans la question 4.

**cas 2**  $\sigma$  se termine par  $\wedge_r$ .

La preuve  $\sigma$  a la forme :

$$\frac{\begin{array}{c} \sigma_1 \quad \sigma_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_r$$

Par hypothèse de récurrence, les preuves sans-coupure  $\sigma_1, \sigma_2$  peuvent être transformées en des preuves de NJ sans détour  $\pi_1, \pi_2$  des séquents  $\mathcal{E}(\Gamma) \vdash A, \mathcal{E}(\Gamma) \vdash B$ . Considérons la preuve  $\pi$  suivante :

$$\frac{\begin{array}{c} \pi_1 \quad \pi_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_{\text{intro}}$$

qui est sans détour car  $\pi_1, \pi_2$  n'ont pas de détour et la dernière règle n'est pas une élimination, donc ne peut être la fin d'un détour.

**cas 2**  $\sigma$  se termine par une règle d'introduction à droite.

Comme dans le cas 1, NJ comporte une règle d'introduction correspondante, ce qui permet de conclure.

**cas 3**  $\sigma$  est un axiome.

Facile.

**cas 4**  $\sigma$  se termine par une règle structurelle.

Facile.

**cas 5**  $\sigma$  se termine par l'une des règles d'introduction à gauche  $\vee_\ell, \rightarrow_\ell, \neg_\ell$ .

Comme NJ n'a pas de règle d'introduction à gauche, chacun de ces trois sous-cas est ... long et laborieux. Les principes sont les mêmes que pour le cas de  $\wedge_\ell$ .